Sur le dualisme dans la théorie des modules

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

48 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreSur le dualisme dans la théorie des modules
Date1895-1897
Sujet

- divisibilité
- Dualgruppen
- dualisme
- dualité
- modules
- Modulgruppen
- notation générale

CoteCod. Ms. Dedekind XI 1, p. 1-24
Format24 f. ; 48 p.
LangueAllemand

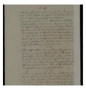
Description & Analyse

DescriptionTexte entièrement rédigé, initialement tiré "Sur le dualisme dans la théorie des modules", corrigé plus tard pour être titré "Sur les Dualgruppen".
Transcription à venir.
Mode(s) d'écritureTexte rédigé
Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Relations

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1

Ce document *utilise la même notation que :*

 [Étude d'un groupe] de type module

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-2

Ce document *est une version préliminaire de :*

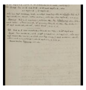
Première rédaction de l'article de 1900

Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1

Ce document *est à lire avec :*

 Quelques théorèmes sur les Modul-Gruppen.

Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1



Exemple le plus simple d'un système S qui n'est pas modulaire

est à lire avec ce document

Afficher la visualisation des relations de la notice.

Mots-clefs

divisibilité, Dualgruppen, dualisme, dualite, modules, Modulgruppen, notation-generale

Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 25/10/2018 Dernière modification le 17/09/2020 ε'. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es ein (und nach β'. auch nur ein einziges) Element m von der Art, daß das System $m\varphi'$ der Durchschnitt von $a\varphi'$, $b\varphi'$ ist. – ~~Dieses Element m ist identisch mit dem im ζ. definirten Element m besitzt in der~~ In der That, das in ζ. definirte Element m besitzt diese Eigenschaft; denn weil die Systeme $a\varphi'$, $b\varphi'$ Theile von $m\varphi'$ sind, so sind deren Elemente a, b auch in $m\varphi'$ enthalten, also ist m ~~d. h. m ist~~ gemeinsames Element von $a\varphi'$, $b\varphi'$, woraus zufolge (31) nach δ'. folgt, daß $m\varphi'$ gemeinsamer Theil ~~von~~ der Systeme $a\varphi'$, $b\varphi'$, mithin auch Theil von deren Durchschnitt ist; bedeutet ferner n irgend ein Element dieses Durchschnittes, also ein gemeinsames Element von $a\varphi'$, $b\varphi'$, so sind a, b nach (31) Elemente von $n\varphi'$, also $a\varphi'$, $b\varphi'$ (nach δ'.) Theile von $n\varphi'$, woraus nach ζ. folgt, daß $m\varphi'$ Theil von $n\varphi'$, also m nach β. Element von $n\varphi'$, mithin n ~~auch~~ nach (31) Element von $m\varphi'$ ist, w. z. b. w.

ζ'. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es immer Elemente c von der Art, daß $a\varphi'$, $b\varphi'$ Theile von $c\varphi'$ bilden, und unter diesen Elementen c befindet sich ein einziges d von der Art, daß $d\varphi'$ ein Theil von jedem solchen System $c\varphi'$ bildet. – In der That, das in ε. definirte Element d besitzt diese Eigenschaft; denn d ist nach β. in dem Durchschnitte $d\varphi'$ ~~der Systeme~~ von $a\varphi'$, $b\varphi'$ enthalten, also Element von jedem dieser beiden Systeme, [mithin sind a, b nach (31)] ~~d. h. a, b sind~~ Elemente von $d\varphi'$, woraus nach δ'. folgt, daß $a\varphi'$, $b\varphi'$ Theile von $d\varphi'$

so zusammen, daß das gemeinsame Feld der durch x und y bezeichneten Zeile und Spalte die Verbindung $x\psi y$ oder $x\varphi y$ liefert, je nachdem dieses Feld der linken unteren oder der rechten oberen Hälfte angehört, während die leeren Diagonalfelder durch $x\psi x = x\varphi x = x$ ausgefüllt werden können.

Umgekehrt, nimmt man ein System S von fünf beliebigen, aber *verschiedenen* Elementen (35) und *definirt* für dasselbe die Operationen φ, ψ durch die vorstehende Tabelle, sowie durch die Gesetze (1), (1'), (4), (4') in §. 1, so ergiebt die im Einzelnen durchzuführende Prüfung, auf welche wir später zurückkommen werden, daß 17
hierdurch auch die Gesetze (2), (2'), (3), (3') in §. 1 erfüllt sind. Definirt man ferner die Zeichen $>$ und $<$ wie in §. 2, so ergiebt sich aus dieser Tabelle in der That, daß $m > d$, $m\varphi(a\psi d) = m\varphi m' = m$, $(m\varphi a)\psi d = d'\psi d = d$, also wirklich $m\varphi(a\psi d)$ *verschieden* von $(m\varphi a)\psi d$ ist, während selbstverständlich der Satz (16) sich als richtig bewährt.

§. 4.

Die beiden Operationen φ und ψ in einem Systeme S sind offenbar vollständig <u>definirt</u>, wenn für je zwei ~~verschiedenen~~ Elemente a, b in S die Verbindungen $a\varphi b$, $a\psi b$ gegeben sind; nehmen wir an, daß hierbei durch die Symmetrie-Gesetze (1), (1') und auch die Gesetze (4), (4') erfüllt sind, so kann man diese Bestimmungen in einer (endlichen oder unendlichen) Tabelle von derselben Form darstellen, wie in dem Beispiele am Schlusse von §. 3. Sind aber die Felder dieser Tabelle <u>willkürlich</u>, <u>beliebig</u> durch Elemente des Systems S besetzt, so wird die Prüfung, ob hierdurch auch die Associations-Gesetze (2), (2') und die Gesetze (3), (3') wirklich befriedigt sind, selbst bei einem endlichen Systeme S von mäßiger Elementen-Anzahl eine mühselige Arbeit erfordern. Oder wenn man auf der Richtigkeit dieser willkürlich aufgestellten Tabelle darauf besteht, so wird die Forderung, daß die vier letztgenannten Gesetze ebenfalls gelten sollen, in der Regel die Folge haben, daß verschieden bezeichnete Elemente mit einander identisch sein müssen. Aus diesem Grunde wollen wir das System der sechs Grundgesetze in §. 1 in ein anderes, äquivalentes System umformen, dessen Prüfung weniger mühsam zu sein scheint. Zu diesem Zwecke bilden wir für jedes Element a des Systems S das mit $a\varphi'$ zu bezeichnende System aller <u>Theiler</u> von a, d. h. aller Elemente d, welche der Bedingung $a\varphi d = d$ (oder $d < a$, $a\psi d = a$) genügen[*], und sprechen

[*] Offenbar ist $a\varphi'$ der Inbegriff aller Elemente von der Form $d = a\varphi b$, wo b willkürlich ist.

~~Sprechen~~ die charakteristischen Eigenschaften dieser Systeme $a\varphi'$ (Theile des Systemes S) so aus, daß die Operationen φ, ψ selbst nicht mehr erwähnt werden:

α. Jedem Elemente a des Systems S entspricht ein vollständig bestimmtes System $a\varphi'$, welches ein Theil von S ist.

β. Das Element a ist in $a\varphi'$ enthalten, also Element des Systems $a\varphi'$. — Dies folgt aus (4) oder (8).

γ. Aus $a\varphi' = b\varphi'$ folgt $a = b$. — Denn zufolge β ist a in $a\varphi'$, also ~~[illegible]~~ in $b\varphi'$ enthalten, d. h. $a < b$, und da ebenso sich $b < a$ ergiebt, so folgt $a = b$ nach dem Satze III in §. 2.

δ. Ist d Element von $a\varphi'$, so ist $d\varphi'$ Theil von $a\varphi'$. — Denn zufolge der Annahme ist $d < a$, und da jedes ~~Element~~ in $d\varphi'$ enthaltene Element $e < d$ ist, so folgt $e < a$ nach Satz IV in §. 2, d. h. e ist auch Element von $a\varphi'$; w. z. b. w. 16

ε. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es ein (und nach γ. auch nur ein einziges) Element d von der Art, daß das System $d\varphi'$ der Durchschnitt ~~[illegible]~~ von $a\varphi'$ und $b\varphi'$, d. h. der Inbegriff aller diesen beiden Systemen gemeinsamen Elemente ist. — Denn setzt man $d = a\varphi b$, so folgt aus (7), daß $d < a$, $d < b$, also d gemeinsames Element von $a\varphi'$ und $b\varphi'$, mithin nach δ., daß $d\varphi'$ gemeinsamer Theil von $a\varphi'$, $b\varphi'$ ist; umgekehrt, wenn e ein gemeinsames Element von $a\varphi'$, $b\varphi'$, also $e < a$, $e < b$ ist, so ist nach (14) auch $e < d$, also e Element von $d\varphi'$, w. z. b. w.

ζ. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es immer Elemente n von der Art, daß $a\varphi'$ und $b\varphi'$ Theile von $n\varphi'$ bilden, und unter diesen Elementen n befindet sich ein einziges m von der Art, daß ~~jedes solche System $n\varphi'$ ein Theil von $m\varphi'$ bildet~~ $m\varphi'$ einen Theil von jedem solchen System $n\varphi'$ bildet. — denn setzt man $m = a\psi b$, so folgt aus (7'), daß $a < m$, $b < m$, also a, b Elemente von $m\varphi'$, mithin $a\varphi'$, $b\varphi'$ nach δ. Theile von $m\varphi'$ ~~bilden~~ bilden; ist ferner n irgend ein Element von derselben Beschaffenheit, sind also $a\varphi'$, $b\varphi'$ Theile von $n\varphi'$, so sind a, b zufolge β. auch Elemente von $n\varphi'$, mithin ist $a < n$, $b < n$, woraus nach (14') folgt, daß $m < n$, also m Element von $n\varphi'$, mithin nach δ. auch $m\varphi'$ Theil von $n\varphi'$ ist, w. z. b. w. — 17

Nachdem wir aus den sechs Grundgesetzen in §. 1, denen die Operationen φ, ψ innerhalb des Systems S gehorchen, die Existenz von Systemen $a\varphi'$ abgeleitet haben, für welche die sechs Gesetze $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gelten, legen wir umgekehrt diese letzteren Gesetze, in welchen die Operationen φ, ψ nirgends erwähnt werden, unserer weiteren Betrachtung zu Grunde, um daraus rückwärts wieder diese Operationen φ, ψ zu definiren. Zunächst wollen wir zeigen, daß man auf Grund ~~der~~ dieser Gesetze $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ den darin auftretenden Systemen $a\varphi'$ immer eine dualistisch ent-~~sprechende~~ zweite Klasse von Systemen $a\psi'$ gegenüberstellen kann, welche genau denselben Gesetzen gehorchen. Ist d ein beliebiges Element, so giebt es zufolge ε. immer mindestens ein Element m, welches die Eigenschaft

befolgt, daß a in dem System $m\varphi'$ enthalten ist, und wir wollen das System $a\varphi'$ als den Inbegriff aller dieser Elemente m erklären; die beiden Aussagen

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ ist Element von } m\varphi' \\ m \text{ ist Element von } a\varphi' \end{array}\right\} \qquad (31)$$

sind daher vollkommen gleichbedeutend. Aus dieser Definition fließen die folgenden sechs Gesetze:

α'. Jedem Elemente a des Systems S entspricht ein vollständig bestimmtes System $a\varphi'$, welches ein Theil von S ist. 13

β'. Das Element a ist in $a\varphi'$ enthalten, also Element des Systems $a\varphi'$. — Dies folgt aus β. und (31).

γ'. Aus $a\varphi' = b\varphi'$ folgt $a = b$. — Denn zufolge β' ist a Element von $b\varphi'$, ebenso b Element von $a\varphi'$, ~~also~~ zufolge (31) ist b Element von $a\varphi'$, ebenso a Element von $b\varphi'$; hieraus folgt nach δ'., daß jedes der beiden Systeme $a\varphi'$, $b\varphi'$ ein Theil des andern, also $a\varphi' = b\varphi'$ ist, woraus nach γ'. sich $a = b$ ergiebt, w. z. b. w.

δ'. Ist m Element von $a\varphi'$, so ist $m\varphi'$ Theil von $a\varphi'$. — Denn nach (31) ist a Element von $m\varphi'$, woraus nach δ. folgt, daß $a\varphi'$ Theil von $m\varphi'$ ist; bedeutet ferner n irgend ein Element von $m\varphi'$, so ~~[illegible]~~ ergiebt sich durch dieselben Schlüsse, daß $m\varphi'$ Theil von $n\varphi'$, also auch $a\varphi'$ Theil von $n\varphi'$ ist; zufolge β. ist daher a Element von $n\varphi'$, also zufolge (31) auch n Element von $a\varphi'$, w. z. b. w.

$$\left.\begin{array}{ll} a\psi m' = m' , & a\varphi m' = a \\ d\psi m' = m' , & d\varphi m' = d \\ a\psi d' = a , & a\varphi d' = d' \\ m\psi d' = m , & m\varphi d' = d' \\ m'\psi d' = m' , & m'\varphi d' = d' \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Verbindet man ~~schliesslich~~ jetzt endlich unsere Prämisse

$$m > d\,,\quad m\psi d = m\,,\quad m\varphi d = d\,, \qquad (29)$$

~~so erhält man die letzten noch fehlenden Verknüpfungen~~

$\cancel{m\psi a = (m\psi d)\psi a =}$

mit (22), (27) und mit (23), (26), so erhält man zufolge der Associationsgesetze (2') und (2) die letzten noch fehlenden Verbindungen

$$\left.\begin{array}{l} m\psi a = (m\psi d)\psi a = m\psi(d\psi a) = m\psi m' = m' \\ a\varphi d = a\varphi(m\varphi d) = (a\varphi m)\varphi d = d'\varphi d = d' \end{array}\right\} \qquad (30)$$

Die in (22), (23), (26), (27), (28), (29), (30) enthaltenen zwanzig Verknüpfungen von je zwei verschiedenen Elementen x, y unseres aus den fünf Elementen (25) bestehenden Systems S stellen wir in der Tabelle

	a	m	d	m'	d'
a		d'	d'	a	d'
m	m'		d	m	d'
d	m'	m		d	d'
m'	m'	m'	m'		d'
d'	a	m	d	m'	

bilden; ist ferner e irgend ein Element von der Art, daß $a\psi'$, $b\psi'$ Theile von $e\psi'$ bilden, so sind die Elemente a, b, weil sie nach β'. resp. in $a\psi'$, $b\psi'$ enthalten sind, auch Elemente von $e\psi'$, ~~d. h. e ist~~ also ist e nach (31) gemeinsames Element der Systeme $a\varphi'$, $b\varphi'$, also auch Element von deren Durchschnitt $d\varphi'$, mithin ~~umgekehrt~~ d [nach (31)] Element von $e\psi'$, woraus nach δ'. folgt, daß $d\psi'$ Theil von $e\psi'$ ist, w. z. b. w. —

Da diese aus den Gesetzen α, β, γ, δ, ε, ζ abgeleiteten Gesetze α', β', γ', δ', ε', ζ' sich von jenen wesentlich nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle des Zeichens φ' das Zeichen ψ' getreten ist, so leuchtet ein, daß umgekehrt die ersteren auf dieselbe Weise aus den letzteren entspringen, wenn man bedenkt, daß zufolge (31) das System $m\varphi'$ umgekehrt der Inbegriff aller derjenigen Elemente d ist, welche die Eigenschaft besitzen, daß m in $d\psi'$ enthalten ist. — 20

~~ableiten lassen, indem man aus der als gegeben aufzufassenden Klasse von Systemen $a\psi'$ eine Klasse von Systemen $a\varphi'$ bildet und die letzteren so definirt, daß d stets und nur dann als Element in das System $m\varphi'$ aufgenommen wird, wenn m Element des Systems $d\psi'$ ist; und da diese Definition der Systeme $a\varphi'$ aus den Systemen $a\psi'$ nicht nur in der äußeren Form, sondern auch nach dem Wesen des dabei entscheidenden Merkmals vollständig mit unserer früheren Definition der Systeme $a\psi'$ aus den Systemen $a\varphi'$ vollständig übereinstimmt, so sind die jetzt aus den Systemen $a\psi'$ abgeleiteten Systeme $a\varphi'$ durchaus identisch mit denjenigen Systemen $a\varphi'$, aus welchen wir die Systeme $a\psi'$ abgeleitet haben. Jede dieser beiden Klassen ist durch die andere vollständig bestimmt.~~

Nehmen wir jetzt an, es sei ein System S von Elementen $a, b \ldots$ gegeben, in welchem die Gesetze $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ (und folglich auch die Gesetze $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \zeta'$) gelten, ~~so wollen wir ausgeführt zeigen, daß für dasselbe System S ein Paar φ, ψ und auch nur ein~~ so lässt sich, wie wir ausgeführt zeigen wollen, ein und auch nur ein einziges Operations-Paar φ, ψ definiren, welches den sechs Grundgesetzen in §. 1 genügt, und aus welchem in der oben angegebenen Weise wieder die jetzt als gegeben anzusehenden Systeme $a\varphi'$ (und $a\psi'$) entspringen. In der That, wenn es ein solches Paar φ, ψ giebt, so ~~müssen~~ folgt aus den obigen Begriffen von ε, ζ mit Rücksicht auf γ, daß allgemein $a\varphi b$, $a\psi b$ resp. mit denjenigen Elementen d, m identisch sein müssen, ~~[illegible]~~ deren ~~Existenz~~ in den Gesetzen ε (oder ζ'), ζ (oder ε') ausgesprochen wird; es kann daher ~~höchstens~~ nur ein einziges solches Paar φ, ψ geben, und ~~[illegible]~~ dasselbe muß so definirt werden, daß, wenn $a\varphi b = d$, $a\psi b = m$ gesetzt wird, $d\varphi'$ den Durchschnitt von $a\varphi'$, $b\varphi'$, ebenso $m\psi'$ den Durchschnitt von $a\psi'$, $b\psi'$ bildet. Aus dieser Definition von φ, ψ ergiebt sich alles Übrige leicht. Da nämlich der Durchschnitt D zweier beliebigen Systeme A, B auch der von B, A, und da ferner, wenn E den Durchschnitt der Systeme B, C bedeutet, der Durchschnitt von D, C zugleich der von A, E,

nämlich der Durchschnitt aller drei Systeme A, B, C ist, so folgt mit Rücksicht auf γ und γ', dass die so definirten Operationen φ, ψ den Symmetrie- und Associations-Gesetzen (1), (1'), (2), (2') genügen. Da ferner, wenn wieder $a\varphi b = d$ gesetzt wird, $d\varphi'$ als Durchschnitt von $a\varphi'$, $b\varphi'$ jedenfalls Theil von $a\varphi'$, also d zufolge β auch Element von $a\varphi'$, mithin a nach (31) Element von $d\psi'$, also $a\psi'$ nach δ' Theil von $d\psi'$ und folglich auch der Durchschnitt der beiden Systeme $a\psi'$, $d\psi'$ ist, so ergiebt sich aus der obigen Definition der Operation ψ, dass $a\psi d = a$ ist, worin das Gesetz (3) besteht; und auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich offenbar das letzte Gesetz (3'). 22
Endlich folgt aus ~~dass zufolge~~ der Definition von φ, dass das System $a\varphi'$ wirklich der Inbegriff aller derjenigen Elemente d ist, welche der Bedingung $a\varphi d = d$ genügen; denn wenn $a\varphi d = d$, so ist $d\varphi'$ als Durchschnitt der Systeme $a\varphi'$, $d\varphi'$ jedenfalls Theil von $a\varphi'$, also d zufolge β Element von $a\varphi'$; und umgekehrt, wenn d irgend ein Element von $a\varphi'$ bedeutet, so ist $d\varphi'$ zufolge δ' Theil von $a\varphi'$, also auch der Durchschnitt der Systeme $a\varphi'$, $d\varphi'$, mithin zufolge der Definition von φ auch $a\varphi d = d$, w. z. b. w. ~~W~~ Und ebenso leuchtet ein, was übrigens schon hierin enthalten ist, dass $a\psi'$ der Inbegriff aller derjenigen Elemente m ist, welche der Bedingung $a\psi m = m$ (oder $m > a$, $a\varphi m = a$) genügen. —

Nachdem unser Kreislauf von den Operationen φ, ψ zu den Systemen $a\varphi'$, $a\psi'$ und von diesen zurück zu jenen hiermit geschlossen ist, leuchtet ein, daß die Prüfung, ob die durch eine Tabelle von der oben beschriebenen Art ~~definirten Operationen φ, ψ~~ und durch die Gesetze (1), (1'), (4), (4') definirten Operationen φ, ψ auch den Gesetzen (2), (2'), (3), (3') gehorchen, darauf zurückkommt, die Systeme $a\varphi'$ zu bilden und nachzusehen, ob die fünf Gesetze β, γ, δ, ε, ζ durchweg erfüllt sind. Da zur Bildung der Systeme $a\varphi'$ schon diejenige Hälfte der Tabelle ausreicht, in welcher die Verbindungen $a\varphi b$ enthalten sind, so ergiebt sich hieraus zugleich das Resultat, daß die andere ~~Hälfte einer richtigen Tabelle~~, die Verbindungen $a\psi b$ enthaltende Hälfte einer richtigen Tabelle schon aus der ersteren folgen muß, daß also die Operation ψ durch die Operation φ vollständig bestimmt ist. Dies läßt sich natürlich auch unmittelbar aus den Grundgesetzen in §. 1 beweisen. Nehmen wir an, die Operation χ gehorche für sich allein und auch in Verbindung mit φ denselben Gesetzen, wie die Operation ψ, so ~~folgt~~ ergiebt sich daraus die Identität von ψ und χ. In der That, setzt man ~~wir~~ zur Abkürzung

$$a\psi b = m\,, \quad a\chi b = n\,,$$

und ersetzt ψ in (3') durch χ, so folgt

$$a\varphi n = a\,, \quad b\varphi n = b$$

und hieraus nach (3), (2'), (3') successive

23

$$a\psi n = n\ , \quad b\psi n = n$$

$$m\psi n = (a\varphi b)\psi n = a\varphi(b\psi n) = a\psi n = n$$

~~also~~ $$m\varphi n = m\varphi(m\psi n) = m\ ,$$

und da man auf dieselbe Weise, wenn ψ, χ überall mit einander vertauscht werden, ~~auch~~ gezeigt $m\varphi n = n$ erhält, so ergiebt sich $m = n$, also immer $a\varphi b = a\chi b$, w. z. b. w.

Was nun die Prüfung betrifft, ob die Systeme $a\varphi'$ den Gesetzen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gehorchen, so wird dieselbe, wie mir scheint, wohl etwas weniger beschwerlich sein, als die unmittelbare Verification der Grundgesetze in §. 1. Nehmen wir als Beispiel das am Schlusse von §. 3 betrachtete System S der fünf verschiedenen Elemente a, m, d, m', d' in (25), so ~~ergiebt~~ ergeben sich aus der einen oder anderen Hälfte der dortigen Tabelle die Systeme

$m'\varphi' = m', m, a, d, d'$	$m'\psi' = m'$
$m\varphi' = m, d, d'$	$m\psi' = m', m$
$a\varphi' = a, d'$	$a\psi' = m', a$
$d\varphi' = d, d'$	$d\psi' = m', m, d$
$d'\varphi' = d'$	$d'\psi' = m', m, a, d, d'$

IV. Ist $a > b$ und gleichzeitig $b > c$, so ist auch

$$a > c. \qquad (10)$$

Denn die beiden Annahmen bestehen in $a\varphi b = b$, $b\varphi c = c$, und hieraus folgt $a\varphi c = a\varphi(b\varphi c) = (a\varphi b)\varphi c = b\varphi c = c$, also $a > c$, w. z. b. w.

V. Sind a, b, c beliebige Elemente, so ist

$$a\psi b > a\varphi c. \qquad (11)$$

Denn zufolge (7') und (7) ist $a\psi b > a$ und gleichzeitig $a > a\varphi c$, und hieraus folgt (11) nach dem vorhergehenden Satze (10).

VI. Ist $m > d$ und $m' > d'$, so ist

$$m\varphi m' > d\varphi d' \qquad (12)$$
$$m\psi m' > d\psi d'. \qquad (12')$$

~~Dies ergiebt~~ Denn sich aus den Identitäten

$$(m\varphi m')\varphi(d\varphi d') = (m\varphi d)\varphi(m'\varphi d')$$
$$(m\psi m')\psi(d\psi d') = (m\psi d)\psi(m'\psi d'),$$

und ~~den~~ Annahmen ~~wenn man bedenkt, daß zufolge der~~ Annahmen

$$m\varphi d = d, \quad m'\varphi d' = d'$$
$$m\psi d = m, \quad m'\psi d' = m'$$

~~nach~~ folgt

$$(m\varphi m')\varphi(d\varphi d') = d\varphi d'$$
$$(m\psi m')\psi(d\psi d') = m\psi m',$$

was mit (12) und (12') übereinstimmt.

a, b immer zwei vollständig bestimmte, durch $a\varphi b$, $a\psi b$ zu bezeichnende Elemente desselben Systems S erzeugen und den folgenden ~~auf~~ stets Gesetzen gehorchen:

$$\cancel{a\varphi a = a} \qquad \cancel{(1)}$$

$$a\varphi b = b\varphi a \qquad \cancel{(2)}\ (1)$$

$$(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c) \qquad \cancel{(3)}\ (2)$$

$$\cancel{a\psi a = a} \qquad \cancel{(1')}$$

$$a\psi b = b\psi a \qquad \cancel{(2')}\ (1')$$

$$(a\psi b)\psi c = a\psi(b\psi c) \qquad \cancel{(3')}\ (2')$$

$$a\psi(a\varphi b)\ \cancel{(a\varphi b)\psi a} = a \qquad \cancel{(4)}\ (3)$$

$$a\varphi(a\psi b)\ \cancel{(a\psi b)\varphi a} = a. \qquad \cancel{(4')}\ (3')$$

Je zwei solche, durch (α) und (α') bezeichnete Gesetze entsprechen einander dualistisch in dem Sinne, daß sie durch Vertauschung von φ und ψ in einander übergehen. Durch dualistische Umwandlung der Voraussetzungen irgend eines Satzes unserer Untersuchung ~~[illegible]~~ muß daher immer ein zweiter Satz entstehen, der dualistische Gegenbild des ersteren, welcher umgekehrt auf dieselbe Weise aus dem zweiten hervorgeht, aber auch sehr wohl mit diesem identisch sein kann.

Aus den associativen Gesetzen ~~(3)~~ (2) und ~~(3')~~ (2') ~~folgt~~ ergiebt sich bekanntlich, daß, ~~bei fortgesetzter Verknüpfung~~ irgend mehrerer Elemente (in endlicher Anzahl) durch dasselbe Zeichen φ oder durch dasselbe Zeichen ψ die Klammern, wenn jedesmal die ~~zur Ausführung dieser Bildung~~ bei jedem Schritte ~~der~~ zur Verbindung ausgewählten Paar

und bei einer Elementen Reihenfolge vorliegen, bei fortgesetzter Verknüpfung

~~zu erhaltender bestimmter Weg~~ von Klammern eigentlich angedeutet werden müsste, fortgelassen werden dürfen; und ebenso folgt aus den symmetrischen oder commutativen Gesetzen (1) und (1'), dass auch jede Vertauschung der hierbei auftretenden Elemente in ihrer ~~Aufeinander~~ Reihenfolge von links nach rechts gestattet ist.*) [

NB! Einzuschieben, was auf der Rückseite D. 3. a steht!

Um zu zeigen, wie verschiedenartig die Gebiete sind, auf welche unsere Untersuchung angewendet werden kann, erwähne ich ausser dem Beispiele der Modul-Theorie, wo $\alpha \varphi \beta$ den grössten gemeinsamen Theiler, $\alpha \psi \beta$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Moduln α, β bedeutet, noch folgende Fälle.

Sind die Elemente $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ des Systems S die sämmtlichen Gruppen, welche in einer endlichen oder unendlichen Abel'schen oder auch Galois'schen Gruppe als Divisoren (Theiler) enthalten sind, so kann man unter $\alpha \varphi \beta$ das ~~grösste~~ kleinste gemeinsame ~~Vielfache~~ ~~Theiler~~, unter $\alpha \psi \beta$ das ~~kleinste~~ grösste gemeinsame ~~Vielfache~~ Theiler der beiden Gruppen α, β verstehen ~~(oder umgekehrt)~~.

Ein ähnliches Beispiel, welches aber doch einen charakteristischen Unterschied zeigt, ist folgendes. Bedeuten die Elemente $a, b, c \ldots$ unseres Systems S alle möglichen Systeme von Dingen (darunter auch das aus keinem Elemente bestehende Nullsystem), so kann man unter $a \varphi b$ das System ~~verstehen~~ aller derjenigen ~~Elem~~ Dinge verstehen, welche wenigstens einem der beiden Systeme

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, §. 2.

D. 3. a.

(welche für jede einzelne der beiden Operationen φ, ψ gelten,)
Diese Folgerungen aus den vier ersten Gesetzen, werde ich
im Folgenden als schon bewiesen ansehen und können ohne Wei-
teres benutzen.

Die beiden letzten Gesetze (3) und (3') enthalten dagegen
einen Zusammenhang zwischen den Operationen φ, ψ, und
ihre Combination führt — auch ohne Zuziehung der früheren Gesetze —
zu den beiden Folgerungen

$$a\varphi a = a \tag{4}$$

$$a\psi a = a, \tag{4'}$$

wenn man das willkürliche Element ~~b~~ b in (3') durch
$a\varphi b$, in (3) durch $a\psi b$ ersetzt. —

a, b angehören, und unter $a \psi b$ das System aller derjenigen Dinge, welche beiden Systemen a, b gemeinsam sind. An einem anderen Orte*) habe ich $a \varphi b$ das aus a, b zusammengesetzte System, $a \psi b$ die Gemeinheit von a, b genannt, während Herr Schröder ~~[illegible]~~ in seinem großen Werke**) dieselben Systeme mit dem Namen der Summe $a + b$ und des Productes ab von a, b belegt.

Die drei vorhergehenden Beispiele stimmen darin überein, daß die Elemente $a, b, c \ldots$ selbst endliche oder unendliche Systeme von Dingen sind, und auch noch darin, daß $a \psi b$ immer die Gemeinheit oder das Product oder — was mir eine recht treffende Benennung zu sein scheint — den Durchschnitt***) der Systeme a, b bedeutet, während $a \varphi b$ in den beiden ersten Beispielen sich nur ausnahmsweise mit dem aus a, b zusammengesetzten System oder Product deckt, vielmehr im Allgemeinen noch andere Dinge enthält, die diesem Product nicht angehören.

Als letztes Beispiel mag das folgende dienen. Die Elemente $a, b, c \ldots$ ~~[illegible]~~ unseres Systemes S seien die sämmtlichen Punkte des reellen Zahlenraumes von n Dimensionen, d. h. jedes Element a sei eine Folge von n reellen Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$, welche als erste, zweite ... n^{te} Coordinate des Punktes a bezeichnet werden mögen; man kann dies auch so ausdrücken, daß jeder Punkt a eine Abbildung des Systemes

*) In meiner Schrift: Was sind und was sollen die Zahlen? S. 1.
**) Vorlesungen über die Algebra der Logik. Bd. 1. SS. 5–7 und S. 253.
***) H. Weber: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1. S. 155.

der ersten n natürlichen Zahlen $1, 2 \ldots n$ im Reihe der reellen Zahlen ist. Die Punkte $a\varphi b$, $a\psi b$ sollen dadurch erklärt werden, daß ~~$(a\varphi b)_\nu$~~ die νte Coordinate $(a\varphi b)_\nu$ immer die algebraisch kleinste, und $(a\psi b)$ die größte der beiden ~~Zahlen~~ Coordinaten a_ν, b_ν ist; man überzeugt sich dann leicht, daß hierdurch unsere obigen ~~acht~~ sechs Gesetze befriedigt werden. Auch hier sind die Elemente $a, b, c \ldots$ Systeme von Dingen (Zahlen), aber bei der Beurtheilung ihrer Identität oder Verschiedenheit entscheidet nicht die Gesammtheit der Coordinaten eines jeden Punktes, sondern die Art, wie dieselben den Zahlen $1, 2 \ldots n$ entsprechen.

§. 2.

Wir wollen nun aus den sechs Grundgesetzen eine Reihe von Folgerungen ableiten.

I. Die beiden Aussagen

$$m\varphi d = d \qquad (5)$$

$$m\psi d = m \qquad (5')$$

sind gleichwerthig, d. h. jede von ihnen ist eine Folge der anderen.

Gilt nämlich (5), so ergiebt sich (5') aus (3), wenn man $a = m$, $b = d$ setzt; und wenn (5') gilt, so ergiebt sich (5) aus (3'), indem man $a = d$, $b = m$ setzt.

Diese, durch (5) oder (5') dargestellte Beziehung zwischen zwei Elementen m, d tritt so häufig auf, daß es zweckmäßig ist, sie noch einfacher ~~[illegible]~~ aus-

zu führen; hierzu wähle ich die beiden, in der Modultheorie*) von mir benutzten Bezeichnungen

$$m > d \qquad (6)$$

$$d < m, \qquad (6')$$

die als vollkommen gleichbedeutend mit einander, wie (5) ~~oder~~ und (5') anzusehen sind; [zugleich mag m ein Vielfaches oder Multiplum von d, umgekehrt d ein Theiler oder Divisor von m heißen.] Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Sätze, deren dualistischer Charakter offenbar daraus entspringt, daß die Vertauschung von φ, ψ immer diejenige der Zeichen $>$, $<$ nach sich zieht.

II. Sind a, b beliebige Elemente, so ist

$$a\varphi b < a \qquad (7)$$

$$a\psi b > a. \qquad (7')$$

$$a < a \qquad (8)$$

$$a > a. \qquad (8')$$

Denn (7) folgt offenbar aus (3) durch Vergleichung mit (5') und (6'), indem man $a = m$, $a\varphi b = d$ setzt, und ebenso folgt (7') aus (3') durch Vergleichung mit (5) und (6), indem man $a = d$, $a\psi b = m$ setzt. Mit Rücksicht auf (4) und (4') ergeben sich ferner die Sätze (8) und (8') aus (7) und (7'), wenn man $b = a$ setzt.

III. Ist $m > d$ und gleichzeitig $m < d$, so ist

$$m = d. \qquad (9)$$

Denn ebenso, wie die erste Annahme $m > d$ nur eine Umschreibung von $m\varphi d = d$ ist, besagt die zweite Annahme $d > m$ in $d\varphi m = m$, und hieraus folgt (9), weil $m\varphi d = d\varphi m$ ist.

---

*) Bei manchen anderen Anwendungs-Gebieten würde ~~die~~ die Vertauschung der beiden Zeichen $>$, $<$ der ihnen sonst beigelegten Bedeutung besser entsprechen.

Besserer Titel: <u>Über Dualgruppen</u>. Zu dieser Abhandlung gehört auch der Inhalt des Folio-Blattes (MG): „Einige Sätze über Modul-Gruppen".

D. 1.

Die <u>Modul-Gruppen</u> bilden den <u>speciellen Fall</u>, der durch den Satz (7) der Dirichlet'schen Zahlentheorie (Aufl. 4, S. 498) charakterisirt ist. Außer diesem erscheint <u>wieder</u> ein <u>specieller Fall</u> die <u>Ideal-Gruppen</u> vom Charakter

$(a+b)-(a+c) = a+(b-c)$

oder

$(a-b)+(a-c) = a-(b+c)$

Über den Dualismus in der Modultheorie.

Von R. Dedekind.

§. 1.

Schon oft habe ich auf einen eigenthümlichen Dualismus aufmerksam gemacht, welcher in der Theorie der Moduln auftritt*). Derselbe wiederholt sich auf ganz anderen Forschungs-Gebieten so häufig, daß es nützlich erscheint, die allgemeinen Verknüpfungs-Gesetze, welche in jener Theorie herrschen, unabhängig von den ihr zu Grunde liegenden Voraussetzungen aufzufassen. Geschieht dies, und ersetzt man die zur Bildung des größten gemeinsamen Theilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von zwei Moduln benutzten Zeichen $+$, $-$ durch φ, ψ, so bleibt zunächst nur die folgende Annahme übrig:

In einem endlichen oder unendlichen System S von Elementen $a, b, c \ldots$, deren Bedeutung gänzlich unbestimmt gelassen wird, giebt es zwei Verknüpfungsarten φ, ψ, welche aus je zwei gleichen oder verschiedenen Elementen

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, vierte Auflage, §. 169.

VII. Ist $m > d$, und a ein beliebiges Element, so ist

$$m \varphi a > d \varphi a \qquad (13)$$

$$m \psi a > d \psi a \qquad (13')$$

Dies ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, wenn man $m' = d' = a$ setzt, was zufolge (8') erlaubt ist.

VIII. Aus $m > d$ und $m' > d$ folgt

$$m \varphi m' > d\ ; \qquad (14)$$

und umgekehrt; aus $m > d$ und $m > d'$ folgt

$$m > d \psi d'. \qquad (14')$$

und umgekehrt.

Beides ergiebt sich aus dem Satze VI, wenn man $d' = d$ oder $m' = m$ setzt; und ~~außerdem die Sätze 7~~ die Umkehrungen folgen aus (7), (7'), (10). ~~[illegible]~~ Offenbar kann man diese Sätze auch so aussprechen, daß jeder gemeinsame Theiler d von m und m' auch Theiler von $m \varphi m'$, und jedes gemeinsame Vielfache m von d und d' auch Vielfaches von $d \psi d'$ ist; wir wollen daher auch $a \varphi b$ den größten gemeinsamen Theiler und $a \psi b$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Elemente a, b nennen.

IX. Ist $m > d$, $m > d'$, $m' > d$, $m' > d'$, so ist

$$m \varphi m' > d \psi d', \qquad (15)$$

und umgekehrt.

Dies ergiebt sich offenbar durch wiederholte Anwendung des vorhergehenden Satzes.

X. Ist $m > d$, und a ein beliebiges Element, so ist

$$m \varphi (a \psi d) > (m \varphi a) \psi d. \qquad (16)$$

Setzt man nämlich $a \psi d = m'$, $m \varphi a = d'$, so sind zufolge (7), (7'), (11) auch die drei letzten Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes erfüllt. — Daß umgekehrt aus (16) stets $m > d$ folgt, ergiebt sich ~~leicht aus (7), (7') und dem Satze IV~~ aus der Umkehrung des IX.

XI. Sind a, b, c drei beliebige Elemente, so ist

$$(a\varphi b)\psi(b\varphi c) < b\varphi(a\psi(b\varphi c)) \qquad (17)$$

$$(a\psi b)\varphi(b\psi c) > b\psi(a\varphi(b\psi c)). \qquad (17')$$

Beides ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze (16), ~~wenn~~ weil dessen Voraussetzung $m > d$ sowohl durch $m = b$, $d = b\varphi c$, als auch durch $m = b\psi c$, $d = b$ befriedigt wird.

Umgekehrt ergiebt sich der Satz (16) sowohl aus (17) als auch aus (17'), wenn man einmal $b = m$, $c = d$ ~~oder~~, sodann $b = d$, $c = m$ setzt und wieder ~~Mtt~~ $m > d$ voraussetzt. Der Satz (16) entspricht dualistisch sich selbst.

XII. Sind a, b, c drei beliebige Elemente, so ist

$$(a\varphi b)\psi(b\varphi c) < b\varphi(a\psi c) \qquad (18)$$

$$(a\psi b)\varphi(b\psi c) > b\psi(a\varphi c). \qquad (18')$$

Denn aus (7), (13'), (13) folgt der Reihe nach

$$b\varphi c < c,\; a\psi(b\varphi c) < a\psi c,\; \boxed{b\varphi(a\psi(b\varphi c)) < b\varphi(a\psi c), \quad (19)}$$ besondere Zeile

und ebenso folgt aus (7'), (13), (13') der Reihe nach

$$b\psi c > c,\; a\varphi(b\psi c) > a\varphi c,\; \boxed{b\psi(a\varphi(b\psi c)) > b\psi(a\varphi c) \quad (19')}$$ besondere Zeile

vergleicht man dies mit (17) und (17'), so ergeben sich die Sätze (18), (18') unmittelbar aus dem Satze IV.

§. 3.

Wir wollen uns zunächst noch eingehender mit dem Satze (16) beschäftigen. In der <u>Modultheorie</u> (und ebenso in den drei anderen Anwendungs-Gebieten, welche in §. 1 erwähnt sind) kann man beweisen, daß aus der <u>Prämisse</u> $m > d$ dieses Satzes auch

$$(m\varphi a)\psi d > m\varphi(a\psi d) \qquad (20)$$

folgt, woraus mit Rücksicht auf den Satz III sich

$$m\varphi(a\psi d) = (m\varphi a)\psi d \qquad (21)$$

ergiebt. Bei diesem Beweise habe ich ausdrücklich hervorgehoben x), daß hierzu die früheren Sätze, welche sämmtlich auf den in §. 1 aufgestellten sechs Grundgesetzen beruhen, durchaus nicht ausreichen, daß es vielmehr erforderlich ist, noch einmal auf den Begriff des Moduls zurückzugehen. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, wollen wir uns jetzt geradezu die Aufgabe stellen, das <u>einfachste</u> Beispiel eines Systems S von Elementen zu finden, in welchem die Operationen φ, ψ den sechs Grundgesetzen in §. 1 gehorchen, in welchem aber die Prämisse $m > d$ <u>keineswegs</u> die Folgerung (20) nach sich zieht.

---

x) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, vierte Auflage, §. 169. S. 499.

Lassen wir zunächst die Annahme $m > d$ gänzlich fallen, und bilden wir aus den drei (beliebigen) Elementen a, m, d das System S die beiden Elemente

$$m' = a \psi d \qquad (22)$$

$$d' = m \varphi a, \qquad (23)$$

so ergiebt sich leicht, daß jede einzelne der folgenden zehn Annahmen

$$\left.\begin{matrix} d > m, \; d' > m, \; d > m', \; d' > m', \; a > m' \\ d' > a, \; m > a, \; a > d, \; m > m', \; d' > d \end{matrix}\right\} \quad (24)$$

die obige Folgerung

$$d \psi d' > m \varphi m' \qquad (20)$$

nach sich ziehen würde. Für die vier ersten Annahmen (24) schließt man dies unmittelbar aus dem Satze IV, wenn man zugleich berücksichtigt, daß zufolge (7) und (7') immer

[auch ohne Zuziehung von (22) oder (23)]

$$d\psi d' > d, \; d\psi d' > d'; \; m > m\varphi m', \; m' > m\varphi m'$$

ist. Zufolge (22) und (7') ist ferner $m' > a$, mithin folgt aus der fünften Annahme $a > m'$ nach dem Satze III, daß $m' = a$, also $m\varphi m' = m\varphi a = d'$ ist, woraus wieder (20) folgt. Ebenso führt die sechste Annahme $d' > a$, weil zufolge (23) und (7) auch $a > d'$ ist, zu den Folgerungen $d' = a$, $d\psi d' = d\psi a = m'$, mithin zu (20). Die siebente Annahme $m > a$ kommt zufolge (23) auf die sechste $d' = a$, ebenso die achte $a > d$ zufolge (22) auf die fünfte $m' = a$ zurück. Da endlich aus (22) und (23), wie schon bemerkt, $m' > a$, $a > d'$ folgt, so kommt nach dem Satze IV die neunte Annahme $m > m'$ auf die siebente $m > a$, und die zehnte $d' > d$ auf die achte $a > d$ zurück.

Da wir aber ein System S herzustellen wünschen, in welchem die Beziehung (20) nicht gilt, so darf darin auch keine der zehn Beziehungen (24) gelten, und folglich müssen (weil immer $x > x$ ist) die fünf Elemente

$$a, m, d, m', d' \qquad (25)$$

sämmtlich von einander verschieden sein. Das denkbar einfachste Beispiel würden wir daher erhalten, wenn es sich als möglich erweisen sollte, daß S nur aus diesen fünf verschiedenen Elementen (25) bestehen könnte. Versuchen wir diese Annahme durchzuführen, so müssten die in S enthaltenen beiden Elemente $d\varphi d'$, $m\psi m'$ mit je einem der Elemente (25) übereinstimmen; da aber jede der Annahmen

$$d\varphi d' = a, m, d, m'$$
$$m\psi m' = a, m, d, d'$$

offenbar auf eine oder mehrere der verbotenen Beziehungen (24) führen würde, so bleibt nur die einzige Möglichkeit

$$d\varphi d' = d', \ d > d', \ d\psi d' = d \qquad (26)$$
$$m\psi m' = m', \ m < m', \ m\varphi m' = m \qquad (27)$$

übrig.

Durch alleinige Anwendung der Grundgesetze in §. 1 auf die Definitionen (22), (23) ergeben sich ferner die folgenden zehn Verknüpfungen