Vier Moduln 1, 2, 3, 4. Daraus gebildet

„ „ vom Typus $1+(2-3-4)$

„ „ „ „ $1-(2+3+4)$

Sechs „ „ „ $\{1+(2-3-4)\}-\{2+(1-3-4)\}$

$=(2-3-4)+(1-3-4)+(1-2)$

Sechs „ „ „ $\{1-(2+3+4)\}+\{2-(1+3+4)\}$

$=(2+3+4)-(1+3+4)-(1+2)$

$\{a+(b-c)\}-\{b+(a-c)\}$
$=(a+a_1)-(b+b_1)$
$=a'''-b'''=d_1=a_1+b_1+c_1$
$=(b-c)+(c-a)+(a-b)$

$(y+q')-(q+y')$
$y>y'$
$q>q'$

$(y+q+q')-(y+q+y')$
$=(y+q)+(q'-(q+y'))$
$=(y+q)+(y'-q')+q$
$=y+q+(y'-q')$

$\{(2-3-4)+(1-3-4)+(1-2)\}-\{3+(1-2-4)\}$

$$\left.\begin{array}{ll}(2-3-4)+(1-3-4)=y\ ;\ (1-2)=q' \\ \qquad\qquad 3=y'\ ;\ (1-2-4)=q\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} y>y'\ ;\ y+y'=y' \\ q>q'\ ;\ q+q'=q'\end{array}$$

$(y+q')-(q+y')=(y+q+q')-(y+q+y')=(y+q)+(q'-(q+y'))$
$=(y+q)+((y'-q')+q)$
$=y+q+(y'-q')$

Folglich schon das Vielfache von je drei Moduln

$$\left.\begin{array}{l}\{1+(2-3-4)\}-\{2+(1-3-4)\}-\{3+(1-2-4)\}= \\ (2-3-4)+(1-3-4)+(1-2-4)+(1-2-3)\end{array}\right\}\ \text{symmetrisch.}$$

$$\left.\begin{array}{l}(y+q')-(q+y') \\ =(q'-(q+y'))+y \\ =((y'-q')+q)+y=y+q+(y'-q')\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{wenn} \\ y>y' \\ q>q'\end{array}$$

48

Entsprechend dem Satz über drei Moduln

$(1+(2-3))-(2+(1-3))=(2-3)+(1-3)+(1-2)$

Allgemeiner Satz über n Moduln $1, 2 \ldots (n-1), n$:

$$(1+\underbrace{m_1}_{\text{Vielfachs von } n-1 \text{ Moduln}})-(2+m_2)-\ldots-((n-1)+m_{n-1})=m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n$$

wo m_1 das Vielf. der $n-1$ Moduln $2, 3 \ldots n$ aller ohne 1

m_2 „ „ „ „ „ $1, 3 \ldots n$ „ „ 2

m_n „ „ „ „ „ $1, 2 \ldots n-1$ „ „ n

Andere Bezeichnung:

n Moduln $a_1, a_2 \ldots a_n$

Daraus

$m_s=a_1-a_2-\ldots a_{s-1}-a_{s+1}\ldots a_{n-1}-a_n$ Vielfaches aller a ohne a_s

Dann Satz: Vielfaches von nur $(n-1)$ Moduln: schon symmetrisch

$(a_1+m_1)-(a_2+m_2)-\ldots-(a_{n-1}+m_{n-1})=m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n$

Beweis durch Schluss von n auf $n+1$:

$n+1$ Moduln $a, a_1 \ldots a_n$

daraus $b, b_1 \ldots b_n$, wo z. B. $b=a_1-a_2-\ldots-a_n$

Ersetzt man in dem als bewiesen angesehenen Satz für n Moduln überall a_s durch a_s-a, wodurch m_s in b_s übergeht, so folgt

$\{(a_1-a)+(b_1)\}-\{(a_2-a)+(b_2)\}-\ldots-\{(a_{n-1})+(b_{n-1})\}$

$=b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}+b_n=\{(a_1+b_1)-a\}-\ldots-\{(a_{n-1}+b_{n-1})-a\}$

$=a-(a_1+b_1)-(a_2+b_2)-\ldots-(a_{n-1}+b_{n-1})$

Nun Addition von $b>(a_1+b_1)-\ldots-(a_n+b_n)$ so folgt das Gewünschte

__Allgemeiner__: Ist

m_1 theilbar durch $a_2, a_3 \dots a_n$ | und diese theilbar durch d_1
m_2 " " $a_1, a_3 \dots a_n$ | " " " " d_2
. . . . | . . . .
m_n " " $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ | " " " " d_n

so ist

$$(a_1+m_1)-(a_2+m_2)-\dots-(a_n+m_n) = b + m_1+m_2+\dots+m_n,$$

wo b das kleinste gem. Vielf. von $a_1, a_2 \dots a_n$; und ebenso

$$(a_1-d_1)+(a_2-d_2)+\dots+(a_n-d_n) = r - d_1 - d_2 - \dots - d_n,$$

wo r der gr. g. Theiler von $a_1, a_2 \dots a_n$.

__Beweis__ I. Diese Sätze sind wahr für $n = 2$; sie lauten nämlich

$$(a_1+m_1)-(a_2+m_2) = (a_1-a_2)+m_1+m_2, \text{ wenn } m_1 > a_2 \text{ und } m_2 > a_1$$
$$(a_1-d_1)+(a_2-d_2) = (a_1+a_2)-d_1-d_2, \text{ wenn } d_1 < a_2 \text{ u. } d_2 < a_1$$

und folgen durch wiederholte Anwendung des Fundamentalsatzes

$$(y+q)-r = (y-r)+q, \text{ wenn } q > r.$$

Die erlaubte Annahme $y = a_1,\ q = m_1,\ r = a_2+m_2$ giebt zunächst

$$(a_1+m_1)-(a_2+m_2) = (a_1-(a_2+m_2))+m_1$$

die erlaubte Annahme $y = a_2,\ q = m_2,\ r = a_1$ giebt

$$(a_2+m_2)-a_1 = (a_2-a_1)+m_2,$$

wodurch der __erste__ Satz bewiesen. Die erlaubte Annahme $y = a_1,\ q = a_2-d_2,\ r = d_1$ giebt

$$(a_1-d_1)+(a_2-d_2) = (a_1+(a_2-d_2))-d_1$$

die erlaubte Annahme $y = a_2,\ q = a_1,\ r = d_2$ giebt

$$(a_2-d_2)+a_1 = (a_2+a_1)-d_2,$$

womit auch der zweite Satz bewiesen.

II. Gelten sie für die Anzahl $n-1$, so gelten sie auch für die Anzahl n. In der That ist dann gewiss

$$(a_2+m_2)-(a_3+m_3)-\dots-(a_n+m_n) = b'+m_2+m_3+\dots+m_n$$
$$(a_2-d_2)+(a_3-d_3)+\dots+(a_n-d_n) = r'-d_2-d_3-\dots-d_n$$

wo b' das kl. g. Vielf. und r' den gr. gem. Theiler von $a_2, a_3 \dots a_n$ bedeutet. Da ferner

$$m_1 > b', \quad m_2+m_3+\dots+m_n > a_1$$
$$d_1 < r', \quad d_2-d_3-\dots-d_n < a_1$$

so folgt aus den für $n = 2$ bewiesenen Sätzen

$$(a_1+m_1)-(b'+m_2+m_3+\dots+m_n) = (a_1-b')+m_1+m_2+\dots+m_n = b+m_1+m_2+\dots+m_n$$
$$(a_1-d_1)-(r'-d_2-d_3-\dots-d_n) = (a_1+r')-d_1-d_2-\dots-d_n = r-d_1-d_2-\dots-d_n$$

w. z. b. w.

__Einfacher ausgedrückt__: Ist immer d_r Theiler von m_s, wenn r, s __ungleich__, so ist

1) $(d_1+m_1)-(d_2+m_2)-\dots-(d_n+m_n) = d+m$ | wo $d = d_1-d_2-\dots-d_n$
2) $(d_1-m_1)+(d_2-m_2)+\dots+(d_n-m_n) = d-m$ | $m = m_1+m_2+\dots+m_n$

und zwar sind 1) und 2) dualistisch zu einander.