

Satz: Läßt  $\alpha$  von  $\sigma$  verschieden,  $\beta, \gamma$  beliebig, so ist

$$\frac{(\beta, \gamma)}{(\beta, \gamma + \alpha)}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache aller Elemente  $(\beta + \varepsilon, \gamma)$ , wo  $\varepsilon$  alle in  $\alpha$  enthaltenen  
Kombinationselemente durchläuft. ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$ )

Beweis: Läßt  $\varepsilon$  ein Kombinationselement, so ist (Produktzähler)

$$(\beta, \gamma) = (\beta + \varepsilon, \gamma) (\beta, \gamma + \varepsilon)$$

$$(\beta, \gamma) (\beta + \varepsilon, \gamma)^{-1} = (\beta, \gamma + \varepsilon)$$

Nun ist

$$m = (\beta + \varepsilon_1, \gamma) - (\beta + \varepsilon_2, \gamma) - (\beta + \varepsilon_3, \gamma) - \dots$$

$$m^{-1} = (\beta + \varepsilon_1, \gamma)^{-1} + (\beta + \varepsilon_2, \gamma)^{-1} + (\beta + \varepsilon_3, \gamma)^{-1} + \dots$$

$$(\beta, \gamma) m^{-1} = (\beta, \gamma + \varepsilon_1) + (\beta, \gamma + \varepsilon_2) + (\beta, \gamma + \varepsilon_3) + \dots = (\beta, \gamma + \alpha), \text{ w.z.b.w.}$$

Zusatz: Läßt man ebenso

$$n = (\beta, \gamma + \varepsilon_1)^{-1} - (\beta, \gamma + \varepsilon_2) - (\beta, \gamma + \varepsilon_3) - \dots$$

so wird

$$n^{-1} = (\beta, \gamma + \varepsilon_1)^{-1} + (\beta, \gamma + \varepsilon_2)^{-1} + (\beta, \gamma + \varepsilon_3)^{-1} + \dots$$

also

$$(\beta, \gamma) n^{-1} = (\beta + \varepsilon_1, \gamma) + (\beta + \varepsilon_2, \gamma) + (\beta + \varepsilon_3, \gamma) + \dots = (\beta + \alpha, \gamma)$$

also ist

$$n = \frac{(\beta, \gamma)}{(\beta + \alpha, \gamma)} \quad \text{das kl. g. Vielfache aller } (\beta, \gamma + \varepsilon), \text{ wo } \varepsilon \text{ alle El. d. Quot. d. durchläuft.}$$

32

Folgew aus: Sind  $\alpha, \beta$  von  $\sigma$  verschieden,  $\omega$  beliebig, so ist

$$(\alpha, \omega) + (\beta, \omega) = (\alpha + \beta, \omega)$$

$$(\omega, \alpha) + (\omega, \beta) = (\omega, \alpha + \beta)$$

nämlich

$$\{(\alpha, \omega) - (\beta, \omega)\} \cdot (\alpha + \beta, \omega) = (\alpha, \omega)(\beta, \omega)$$

$$\{(\omega, \alpha) - (\omega, \beta)\} \cdot (\omega, \alpha + \beta) = (\omega, \alpha)(\omega, \beta)$$

also

$$(\alpha + \beta, \omega)^{-1} = (\alpha, \omega)^{-1} - (\beta, \omega)^{-1}$$

$$(\omega, \alpha + \beta)^{-1} = (\omega, \alpha)^{-1} - (\omega, \beta)^{-1}$$

Andere Buchstaben: Läßt die Kombination  $\alpha$  von  $\sigma$  verschieden,  $\omega$  und  $\beta$  beliebig, so sind die Quotienten

$$\frac{(\omega, \beta)}{(\omega, \alpha + \beta)}, \quad \frac{(\beta, \omega)}{(\alpha + \beta, \omega)}$$

die kl. g. Vielf. aller  $(\omega + \varepsilon, \beta)$ , resp. aller  $(\beta, \omega + \varepsilon)$ , wo  $\varepsilon$  alle in  $\alpha$  enthaltenen

Satz: Sind  $\alpha, \beta$  von Null verschieden, so ist

$$(\omega, \alpha) + (\omega, \beta) = (\omega, \alpha + \beta).$$

Proof. Nach dem Productatz (13) ist

$(\omega, \alpha) = \prod_{\substack{\text{mindestens zwei} \\ \text{in } \alpha_1, \alpha_2}} (\omega + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2)$ ,  $(\omega, \beta) = \prod_{\substack{\text{mindestens zwei} \\ \text{in } \beta_1, \beta_2}} (\omega + \alpha_1, \beta_1 + \alpha_2)$  usw., d.h.  $\beta$  kann  $\beta_1, \beta_2$  durchlaufen; beide Produkte haben den letzten Factor  $(\omega, \alpha + \beta)$  gemeinsam ( $\beta_1 = \alpha_1 = 0$ ) und wenn man

Aufspaltung anstellt,

$$(\omega, \alpha) = (\omega, \alpha + \beta) \gamma, \quad (\omega, \beta) = (\omega, \alpha + \beta) \eta$$

setzt, so ist jedes Factor  $\gamma = (\omega + \beta_1, \alpha + \beta_2)$  von  $\gamma$  und zu jedem Factor  $\eta' = (\omega + \alpha_1, \beta + \alpha_2)$  und zu  $\eta'$  mindestens zwei Elemente von  $\alpha$  durchlaufen; ebenso  $\omega + \alpha_1$  mit  $\alpha + \beta$  die von Null verschiedene Kombination  $\alpha_1$  gemeinsam hat, und weil  $(\omega + \beta_1) \gamma + (\omega + \beta_2) \eta' = (\omega + \alpha_1) + (\beta + \alpha_2) = \omega + \alpha + \beta$  ist (nach dem vorigen Satz). Während  $\gamma + \eta' = \omega$  folgt (nach §. 5) auch  $\gamma + \eta = \omega$ , also  $(\omega, \alpha) + (\omega, \beta) = (\omega, \alpha + \beta)(\gamma + \eta) = (\omega, \alpha + \beta)$ , w.z.b.w.

Satz: Ist  $\alpha$  von Null verschieden, so ist

$$(\omega, \alpha) = \sum_{\alpha_0 \in \alpha} (\omega, \alpha_0) \quad \text{speziell } (\omega, \alpha) = \sum_{\alpha_0 \in \alpha} (\omega, \alpha_0),$$

1101 M 203

wo  $\alpha_0$  alle Elemente von  $\alpha$  durchläuft.

(Unmittelbare Folgerung des vorigen Satzes.)

Satz: Durchläuft  $\alpha_0$  alle Elemente von  $\alpha$  (von Null verschieden), so ist

$$\frac{(\omega, \alpha)}{(\omega, \alpha_0)}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache aller  $(\omega + \alpha_0)$  ist als auszumachen

Proof. Da (nach dem Productatz)  $(\omega, \alpha) = (\omega + \alpha_0) (\omega, \alpha_0)$  ist, so ist (aus dem vorigen Satz und nach §. 5)  $(\omega, \alpha) = (\omega + \alpha_0) \sum_{\alpha_0 \in \alpha} (\omega + \alpha_0)^{-1}$

$$(\omega, \alpha) = \sum_{\alpha_0 \in \alpha} \frac{(\omega, \alpha_0)}{(\omega + \alpha_0)^{-1}} = (\omega, \alpha_0) \sum_{\alpha_0 \in \alpha} (\omega + \alpha_0)^{-1} = (\omega, \alpha_0) \bar{m}^{-1}$$

$\alpha_0 = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  lässt sich legen. (C. P. O. S. 88).

$m = (\omega + \varepsilon_1, \alpha_0) - (\omega + \varepsilon_1, \varepsilon_2) - (\omega + \varepsilon_1, \varepsilon_3)$  Erstes. H. Wolf. Herzog.

also

$$\bar{m}^{-1} = (\omega + \varepsilon_1, \alpha_0)^{-1} + (\omega + \varepsilon_2, \alpha_0)^{-1} + (\omega + \varepsilon_3, \alpha_0)^{-1} + \dots$$

$$(\omega, \alpha) \bar{m}^{-1} = (\omega, \varepsilon_1) + (\omega, \varepsilon_2) + \dots + (\omega, \varepsilon_3) = (\omega, \alpha)$$

N.B.! Dieser Satz wird durch den Abgleichsatz auf S. 8 bestätigt.



[§. 6]. Man befreite nun die Berechnung von §. 3 und 4 bei. Von den  $2^n$  Elementen  $(\alpha, \omega)$  sollen aber nur noch diejenigen  $n+1$  wahlweise gewählt werden, in denen  $\alpha$  vom Grade 0 oder 1 ist, also

$(0, \omega)$  und  $(1, \omega), (2, \omega) \dots (n, \omega)$ ;

alle anderen  $(\alpha, \omega)$  sollen definiert werden durch

$$(\alpha, \omega) = \sum (\varepsilon, \omega) = (\varepsilon_1, \omega) + (\varepsilon_2, \omega) + (\varepsilon_3, \omega) + \dots,$$

wo  $\varepsilon$  alle in  $\alpha$  enthaltenden Elemente (d.h. vom Grade 1) durchläuft.

Satz: Sind  $\alpha, \beta$  von Null verschieden,  $\omega$  beliebig, so ist

$$(\alpha, \omega) + (\beta, \omega) = (\alpha + \beta, \omega).$$

Beweis durch Induktion nach  $\omega$ . Denn 1) der Satz gilt zufolge der Definition von  $(\alpha, \omega)$ ,  $(\beta, \omega)$  für  $\omega = 0$ , weil alle in  $(\alpha + \beta, \omega)$  enthaltenden Elemente aus dem in  $\alpha$  und  $\beta$  enthalten bestehen (und jedes etwa in  $\alpha - \beta$  enthaltene Element  $\varepsilon$  gibt den Beitrag  $(\varepsilon, \omega) + (\varepsilon, \omega) = (\varepsilon, \omega)$ ). 2) ist zu zeigen, dass der Satz für  $\omega$ , und mit  $\gamma$  ein (in  $\omega$  nicht enthaltenes) Element, so gilt es auch für  $\omega + \gamma$ . Zu diesem Zweck sei

$$(\alpha, \omega) = \alpha, (\beta, \omega) = \beta, (\gamma, \omega) = \gamma$$

~~$(\alpha, \omega + \gamma) = \alpha + \gamma, (\beta, \omega + \gamma) = \beta + \gamma$~~

so ist nach hypothetischer Annahme des Induktions-Annahmen

$$\text{also } \alpha + (\alpha + \gamma) = \alpha + \alpha + \gamma \quad (\alpha + \gamma, \omega) = \alpha + \gamma, \quad (\beta + \gamma, \omega) = \beta + \gamma, \quad (\alpha + \beta, \omega) = \alpha + \beta$$

und nach Produktregel:

$$(\alpha + \beta + \gamma, \omega) = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\begin{aligned} a &= (\alpha + \gamma) \alpha', \quad b = (\beta + \gamma) \beta', \quad c = (\alpha + \beta + \gamma) \gamma' \\ a + b + c &= (\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha' + \beta') \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } ab + ac + bc = (\beta + \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha' + \beta')$$

~~$\text{woraus nach dem Distributivgesetz } (a+b)(c+d)(e+f) = (a+c)(b+d)+(a+d)(b+c) \text{ folgt}$~~ 

$$ab + bc + ac = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha' + \beta')$$

$$a = (\alpha + \gamma)(\alpha, \omega + \gamma), \quad b = (\beta + \gamma)(\beta, \omega + \gamma), \quad c = (\alpha + \beta + \gamma)(\gamma, \omega + \gamma)$$

Mithin

$$(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \{(\alpha, \omega + \gamma) + (\beta, \omega + \gamma)\} = \alpha(\beta + \gamma) + \beta(\alpha + \gamma) = ab + ac + bc$$

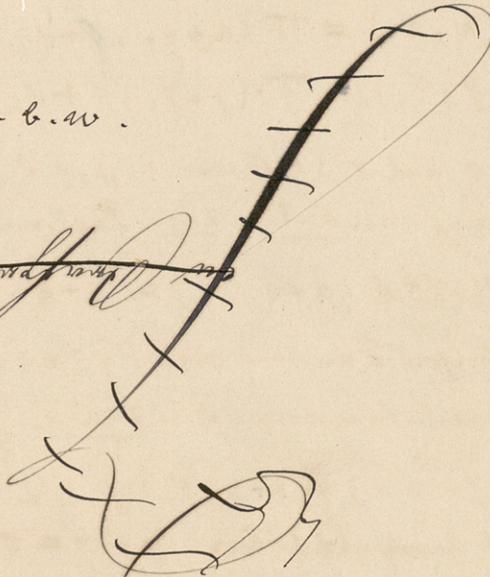
Multipliziert man hiermit die letzte vorhergehende Gleichung und dividiert durch

$$(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha' + \beta') = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha' + \beta')$$

so folgt

$$(\alpha, \omega + \gamma) + (\beta, \omega + \gamma) = (\alpha + \beta, \omega + \gamma), \text{ w.z.b.w.}$$

~~ausgenommene Wahl von  $\alpha, \beta, \gamma$~~



Forts. von §. 5. Wenn in der Abelischen Gruppe  $M$  eine solche Addition (+) möglich ist (vorige Seite), so kann man daraus eine dualistisch entgegengesetzte Operation (-) definieren durch

$$a - b = \frac{ab}{a+b}$$

Dieselbe hat folgende Eigenschaften:

- (1')  $a - a = a$ ; (2')  $a - b = b - a$ ; (3')  $(a - b) - c = a - (b + c)$ ; (4')  $(a - b)c = ac - bc$   
 (5)  $a + (a - b) = a$ ; (5')  $a - (a + b) = a$ ; (6)  $(a + b) - (a + c) = a + (b - c)$ ; (6')  $(a - b) + (a - c) = a - (b + c)$  siehe Planck's Beweise:

(1')  $a - a = \frac{aa}{a+a} = \frac{a}{a} = a$ ; (2')  $a - b = \frac{ab}{a+b} = \frac{ba}{b+a} = b - a$ .  
 (3')  $(a - b) - c = \frac{ab}{a+b} - c = \frac{ab}{a+b} + \frac{-ac}{a+b} = \frac{ab - ac}{a+b} = \frac{abc}{ab + (a+b)c} = \frac{abc}{bc + ca + ab}$  symmetrisch, wie oben.  
 (4')  $(a - b)c = \frac{ab}{a+b}c = \frac{abc}{a+b} = \frac{(ac)(bc)}{a+b} = ac - bc$  aufgrund der beiden Zeilen  
 (5)  $a + (a - b) = a + \frac{ab}{a+b} = \frac{a(a+b)}{a+b} + \frac{ab}{a+b} = \frac{a(a+b)+ab}{a+b} = \frac{a^2+ab}{a+b} = \frac{a(a+b)}{a+b} = a$   
 (5')  $a - (a + b) = \frac{a(a+b)}{a+(a+b)} = \frac{a(a+b)}{a+b} = a$   
 (6)  $(a + b) - (a + c) = \frac{(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)} = \frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c}$  identisch, da es in  
 $a + (b - c) = a + \frac{bc}{b+c} = \frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{bc}{b+c} = \frac{ab+ac+bc}{b+c}$  Latz auf vorige Seite.  
 (6')  $(a - b) + (a - c) = \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} = \frac{ab(ac)}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac(ab)}{(a+b)(a+c)} = \frac{ab(ac) + ac(ab)}{(a+b)(a+c)} = \frac{ab(ac+ab)}{(a+b)(a+c)}$  Schwartz blau,  
 $a - (b + c) = \frac{a(b+c)}{a+(b+c)} = \frac{a(b+c)}{a+b+c}$  ebenso. 34

Latz: Sei  $a + m = a$  und  $b + n = b$ , so ist auch  $(a - b) + (m - n) = a - b$  aus der additiven  
 Komplementarität. Da  $a - m = a + (-m) = a$  ist, so ist  $m = -a$  ein eindeutiges  
 $a - m = a + (-a) = 0$

Latz:  $a + m = a$  ist gleichbedeutend mit  $a - m = a$ , da man nun  
 weil  $(a + m) - m = m$  und  $(a - m) + a = a$

Theilbarkeit.  $m > a$ ,  $a < m$  |  $a > a + b$ ;  $a < a - b$

u.s.f. eindeutig zu definieren, da es nur für  $a > 0$

Latz.  $(a + b + c + \dots)^{-1} = a^{-1} - b^{-1} - c^{-1} - \dots$  |  $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \dots = (a - b - c - \dots)^{-1}$   
 $(a - b - c - \dots)^{-1} = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \dots$  |  $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \dots = (a - b)^{-1}$   
 u.s.f. zu beweisen, dass in den Letzten  
 $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \dots = (a - b)^{-1} + c^{-1} + \dots = (a - b - c)^{-1}$   
 u.s.w.

Definition.  $a$  heißt ganz, wenn  $a + b = b$ , also auch  $b - a = a$  im Körper,

Definition.  $a, b$  heißen freund, wenn  $a + b = 0$ . Sie sind eines ganz.

Latz: Aus  $m > a$  folgt  $m - a > a - a$ , u.s.w.

Aus  $m > a$  und  $m > b$  folgt  $m > a - b$ ; u.s.w.

Latz: Sind  $p, q$  Produkte von gauen Faktoren, so ist  $p + q = 0$  gleichbedeutend nicht  
 allein  $p' + q' = 0$ .

endlicher

Einführung. Liegt ein System von natürlichen Zahlen  $a, b, c \dots$  vor, und bildet man alle größten gemeinsamen Teiler <sup>von</sup> ~~der~~ zweier oder mehrerer dieser Zahlen, so werden die letzteren hiervon durch ~~abgetrennt~~ auf manifache Weise in Factoren zerlegt. Obgleich nun diese Factoren im Allgemeinen bekanntlich keine Prinzipien sind, so leisten sie doch für manche Untersuchungen ausreichende Dienste, und es verlohnt sich daher wohl der Mühe, die hierbei auftretenden Gesetze im Zusammenhang darzustellen. Dies ist der Gegenstand des folgenden Aufsatzes, ~~doch soll zugleich~~ welcher die ursprüngliche Aufgabe so viel wie möglich verallgemeinert und auch auf Gebiete übertragen werden, in denen es gar keine Zerlegungen in eigentliche Prinzipien gibt. Zum Verständnis genügen aber die ersten Elemente der Zahlenlehre (oder Logik).

Titel: Über Zerlegungen von Zahlen oder Idealen durch ihre größten gemeinsamen Teiler.

§. 5). Operation + in der Abel'schen Gruppe, in welcher das aus  $a, b$  erzeugte Element durch  $a+b$  ( $= ba$ ) bezeichnet wird (Name: Multiplikation für die Gruppen-Operation). Die neue Operation <sup>(Name = Addition)</sup> innerhalb derselben Gruppe soll die Bedingungen

(1)  $a+a = a$ ; (2)  $a+b = b+a$ ; (3)  $(a+b)+c = a+(b+c)$  und (4)  $(a+b)c = ac+bc$  erfüllen. Hieraus folgt z. B.

$$(a+b+c)(b+c+a+b) = (b+c)(a+a)(a+b)$$

und für jeden nicht negativen Exponent  $n$ :

$$(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n; (a+b)^n + a^n = (a+b)^n; n \geq 0$$

Es ist daher auch

$$(a+a)^n = a + a + a^2 + \dots + a^n; (a+a)^{n+1} = (a+a)^n + a^{n+1}; n \geq 0$$

Durch die Annahme der Existenz der Operation + (Addition) wird die Allgemeinheit der Abel'schen Gruppe beschränkt! Satz. Die Abel'sche Gruppe hat nur den einzigen endlichen Teiler  $v$ .

Beweis. Dann kann  $v$  ein endlicher Teiler der Gruppe, und  $a$  ein Element von  $\Omega$  ist, so gibt es eine natürliche Zahl  $e$ , die der Bedingung  $va^e = v$  genügt; daraus folgt

$$va(v+a)^{e-1} = a(v+a+\dots+a^{e-1}) = a+a^2+\dots+a^{e-1}+v = (a+v)^{e-1}, \text{ also } a = v, \text{ w.z.b.w.}$$

[Statt  $a$  lieber  $y$ !]

Frage: Gibt es innerhalb einer unendlichen Abel'schen Gruppe  $\Omega$ , die aus allen Potenzen <sup>( $a^{\infty}$ )</sup> (positiv und negativer Exponent  $x$  und  $a^0 = v$ ) eines Elements  $a$  besteht, eine Addition in obigen Linie?

Antwort: Ja, und zwar zwei (dualistisch entgegengesetzte) Additionen. — Galtet es gebe eine Addition, so muss es eine ganze rationale Zahl  $e$  geben, welche der Bedingung

$$v+a = a^e$$

genügt. Nunmehr zunächst an, es sei  $e \geq 1$ , und addiert auf beiden Seiten <sup>und addiert auf beiden Seiten</sup> allentwas ein gleiches, <sup>so folgt durch Subtraktion des ersten Gliedes</sup> <sup>also  $a^e = v$</sup>  <sup>die Existenz der Addition</sup> <sup>Summe</sup>

$$\begin{aligned} & a + \dots + a^e \\ & \text{so folgt } v + a + \dots + a^e = a + \dots + a^e \\ & \text{also } (v+a)^e = v(a+a)^{e-1} = v(a+a)^{e-1} = v; e=1 \end{aligned}$$

Es kann daher nicht  $e > 1$  sein. Dieselbe Gruppe  $\Omega$  besteht aber auch aus allen Potenzen des reciproken Elements  $\bar{a}$ , und da  $v + \bar{a}^{-1} = \bar{a}^{e-1} = (\bar{a}^{-1})^{1-e}$ , so kann auch nicht  $1-e > 1$ , also nicht  $e < 0$  sein. Mithin sind nur die beiden Fälle  $e=0$  oder  $e=1$  (zusammen  $e^2=1$ ).  $v = (v+a)^n, v + a^n = (v+a)^n + a^n = (v+a)^n = v$ !

Fall 1:  $e=0$  Kürzt die zweite Zeile durch den Exponenten zur Null aus, wenn  $n \geq 0$  (dann ist die Gruppe ein Teil der Abel'schen Gruppe) und da  $v + a = v$ , also  $v+a = (v+a) - v = 0 = v$ , und dann für jegliche natürliche Zahl meistens  $v + a^n = v$  bewiesen ist, so folgt durch Addition von  $a$ , dass  $v + a^{n+1} = v + a^n + a = v + a^n = v$ . Letztlich ist  $v + a^{-1} = v + a^{n+1}$ , also  $v + a^{-1} = v + a^n$ .

Gesetz  $a^x + a^y = a^k (a^{x-k} + a^{y-k}) = a^k$ , mit einer der Zahlen  $x-k, y-k$   $= 0$ , die andere  $\geq 0$  ist. Statt  $a$  lieber  $y$ .  $y^x + y^y = y^k$ , wobei die entsprechenden Exponenten gleich sind. Umgekehrt: Wird und (1), (2), (3), (4) erfüllt.

Über Zerlegungen von Zahlen oder Idealen durch ihre gr. gr. Theile.

(2)

- 13) Latz II: Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  Kombinationen, ~~sind~~ durchlosen  $\gamma_1, \gamma_2$  alle Kombinationen, die der Bedingung  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$  genügen, so ist

$$(\alpha, \beta) = \prod (\alpha + \gamma_1, \beta + \gamma_2). \quad \text{Name: Produkt-Latz.}$$

AB! Man braucht nur die Kombinationen  $\gamma_1, \gamma_2$  zu betrachten, für welche  $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$  ist, weil für jedes andere Paar  $(\alpha + \gamma_1, \beta + \gamma_2) = \sigma$  ist zufolge Latz I.

Beweis durch vollst. Induktion in Bezug auf  $\gamma$ . Wenn 1) gilt der Latz für  $\gamma = 0$ . Und 2) wenn es für jedes  $\gamma$  vom Grade  $c$  gilt, so gilt er auch für jedes  $\gamma'$  vom Grade  $c+1$ ;  $\gamma' = \gamma + \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  ein Element.

dann sind alle Lösungen  $\gamma'_1, \gamma'_2$  der Gleichung  $\gamma'_1 + \gamma'_2 = \gamma'$  gegeben durch

$$\gamma'_1 = \varepsilon + \gamma_1, \gamma'_2 = \gamma_2 \quad \text{und} \quad \gamma'_1 = \gamma_1, \gamma'_2 = \varepsilon + \gamma_2,$$

also (nach Axiom über  $\gamma$ )

$$\prod (\alpha + \gamma'_1, \beta + \gamma'_2) = \prod (\alpha + \varepsilon + \gamma_1, \beta + \gamma_2) \prod (\alpha + \gamma_1, \beta + \varepsilon + \gamma_2) = (\alpha + \varepsilon, \beta) (\alpha, \beta + \varepsilon)$$

Es ist also nur zu beweisen, dass (specielles Falle, besser als Latz II ~~mit~~ I zu stellen).

$$(\alpha, \beta) = (\alpha + \varepsilon, \beta) (\alpha, \beta + \varepsilon), \quad \text{wo } \varepsilon \text{ Element.}$$

Beweis dieses ersten Spezialfalles.. Es ist nach Definition 11):

$$(\alpha, \beta) = \frac{\prod (\alpha + \beta'', 0)}{\prod (\alpha + \beta', 0)}; (\alpha + \varepsilon, \beta) = \frac{\prod (\alpha + \varepsilon + \beta'', 0)}{\prod (\alpha + \varepsilon + \beta', 0)}; (\alpha, \beta + \varepsilon) = \frac{\prod (\alpha + (\varepsilon + \beta)'', 0)}{\prod (\alpha + (\varepsilon + \beta)', 0)}$$

Hilf Ist  $\varepsilon$  in  $\beta$  enthalten, ~~ist~~ ist  $\beta$  Element  $(\alpha + \varepsilon, \beta) = \sigma$  zufolge Latz I, weil  $\alpha + \varepsilon$  und  $\beta$  das Element  $\varepsilon$  gemeinsam haben, und  $(\alpha, \beta + \varepsilon) = (\alpha, \beta)$ , also der Latz richtig. Ist aber  $\varepsilon$  nicht in  $\beta$  enthalten, so bestehen die Kombinationen

$$(\varepsilon + \beta)'' \text{ aus } \varepsilon + \beta' \text{ und } \beta'' \quad \left. \right\} \text{ falls } \beta = 0, \text{ so gibt es kein } \beta'$$

$$(\varepsilon + \beta)' \text{ aus } \varepsilon + \beta'' \text{ und } \beta' \quad \left. \right\}$$

aus ist

$$\prod (\alpha + (\varepsilon + \beta)'', 0) = \prod (\alpha + \varepsilon + \beta', 0) \prod (\alpha + \beta'', 0)$$

$$\prod (\alpha + (\varepsilon + \beta)', 0) = \prod (\alpha + \varepsilon + \beta'', 0) \prod (\alpha + \beta', 0)$$

woraus sich der Latz ergibt.

Dieser Spezialfall besitzt als besonderer Latz voranschicken!

35

- 14) Latz III (oder IV):  $(\alpha, \beta + \omega) = \frac{\prod (\alpha + \omega'', \beta)}{\prod (\alpha + \omega', \beta)}$ . Bearb  $\gamma$  statt  $\omega$  und dann  $\delta = \varepsilon + \gamma$ .

Beweis. Gilt für  $\omega = 0$  (Neuer fällt weg) wie kann  $\omega'$  da ist). Gilt er für  $\omega$ , so gilt er auch für  $\omega = \varepsilon + \omega$ , wo  $\varepsilon$  Element (nicht in  $\omega$ ). Wenn

$$\{(\varepsilon + \omega)'' \text{ besteht aus } \varepsilon + \omega' \text{ und } \omega''\} = \delta'' \\ \{(\varepsilon + \omega)'\} \hookrightarrow \varepsilon + \omega'' \hookrightarrow \omega' = \delta'$$

Induktion in Bezug auf  $\omega$

also

$$\begin{aligned} \prod (\alpha + (\varepsilon + \omega)'', \beta) &= \prod (\alpha + \varepsilon + \omega', \beta) \prod (\alpha + \omega'', \beta) \quad \text{Kürzen} = \frac{(\alpha, \beta + \omega)}{(\alpha + \varepsilon, \beta + \omega)} = (\alpha, \beta + \omega + \varepsilon) = \\ \prod (\alpha + (\varepsilon + \omega)', \beta) &= \prod (\alpha + \varepsilon + \omega'', \beta) \prod (\alpha + \omega', \beta) \quad \text{nach 4 (od. 10)} \end{aligned}$$

w.z.t.w.

- 15) Latz IV (od. V):  $(\alpha + \gamma, \beta) = \frac{\prod (\alpha, \beta + \gamma'')}{\prod (\alpha, \beta + \gamma')}$ ; speziell  $(\gamma, \beta) = \frac{\prod (0, \beta + \gamma'')}{\prod (0, \beta + \gamma')}$  Gegenstück des Kürzens.

Beweis. Gilt für  $\gamma = 0$  (wie Neuer fällt weg); gilt er für  $\gamma$ , so gilt er auch für und ist  $\delta = \gamma + \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  Element (nicht in  $\gamma$ ), so ist

$$\frac{\prod (\alpha, \beta + \delta'')} {\prod (\alpha, \beta + \delta')} = \frac{\prod (\alpha, \beta + \varepsilon + \gamma'') \prod (\alpha, \beta + \gamma'')} {\prod (\alpha, \beta + \varepsilon + \gamma'') \prod (\alpha, \beta + \gamma')} = \frac{(\alpha + \varepsilon, \beta)}{(\alpha + \varepsilon + \gamma, \beta)} = (\alpha + \varepsilon + \gamma, \beta) = (\alpha + \delta, \beta) \quad \text{nach Latz 17}$$

w.z.t.w.

AB! Man kann (14) auch durch Induktion nach  $\beta$  beweisen: gilt für  $\beta = 0$ ; und wenn  $\varepsilon$  ein nicht in  $\beta$  enthaltenes Element, so folgt aus dem Latz (14) für  $\beta$  auch

$$(\alpha + \varepsilon, \beta + \omega) = \frac{\prod (\alpha + \varepsilon + \omega'', \beta)}{\prod (\alpha + \varepsilon + \omega', \beta)}; (\alpha, \beta + \omega) = \frac{\prod (\alpha + \omega'', \beta)}{\prod (\alpha + \omega', \beta)} = \frac{\prod (\alpha + \varepsilon + \omega'', \beta) (\alpha + \omega'', \beta + \varepsilon)}{\prod (\alpha + \varepsilon + \omega', \beta) (\alpha + \omega', \beta + \varepsilon)}$$

also

$$(\alpha, \beta + \varepsilon + \omega) = \frac{(\alpha, \beta + \omega)}{(\alpha + \varepsilon, \beta + \omega)} = \frac{\prod (\alpha + \omega'', \beta + \varepsilon)}{\prod (\alpha + \omega', \beta + \varepsilon)}, \quad \text{w.z.t.w.}$$

Und besser (14) und (15) durch Induktion nach  $\omega$  durch Übergang zu  $\omega + \varepsilon$ .

- 1) irgend eine Combination aus  $n$  Elementen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , darunter auch die  $0$ , d.h. die Combination, welche kein Element enthält; 2) die Anzahl aller verschiedenen  $\alpha$ ; Nicht
- 2) Grad von  $\alpha$  ist die Anzahl der verschiedenen in  $\alpha$  enthaltenen Elemente;  $0$  ist der Grad von  $0$ .  $\alpha$  heißt paar oder unpaar, je nachdem der Grad von  $\alpha$  gerade oder ungerade ist;  $0$  ist paar.
- 3) Eine Combination  $\alpha$  heißt Theil von  $\alpha$ , wenn jedes in  $\alpha$  enthaltene Element  $\varepsilon$  auch in  $\alpha$  enthalten ist;  $0$  ist Theil von jedem  $\alpha$ ; 2. Anzahl aller Theile von  $\alpha$ .
- 4) Die Theile von  $\alpha$  sollen mit  $\alpha''$  oder  $\alpha'$  bezeichnet werden, je nachdem sie paar oder unpaar sind; die Anzahl beider ist  $= 2^{\text{Grad } \alpha}$ , wenn der Grad  $\alpha > 0$ ; dagegen hat  $0$  nur den einen paaren Theil  $0 = 0''$  und den keinen unpaaren Theil  $0' = 0$ .
- 5) Die aus  $\alpha$  und  $\beta$  zusammengesetzte Combination  $\alpha\beta = \beta\alpha$  besteht aus allen denjenigen Ele-  
menten, welche wenigstens in einer der beiden Combin.  $\alpha, \beta$  enthalten sind.  $\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$
- 6) Das System aller  $\alpha, \beta$  besteht die reelle Bereich-Summe  $\alpha + \beta$  mit den Eigenschaften:
- 7) Theiel  $\alpha + \alpha = \alpha; \alpha + \beta = \beta + \alpha; (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma); \alpha + 0 = \alpha$
- 8) Der Durchschnitt von  $\alpha, \beta$  besteht aus allen Elementen, welche  $\alpha, \beta$  gemeinsam sind.
- 9) Ist  $a$  der Grad von  $\alpha$ ,  $b$  der Grad von  $\beta$ ,  $c$  der des Durchschnitts von  $\alpha, \beta$ , so ist  $a+b-c$  der Grad von  $\alpha\beta$ ;  $a+b=c+d$ .
- 10) Sind  $\alpha, \beta$  theilfrei (also  $\alpha = 0$ ), so besteht das System aller  $(\alpha\beta)$  aus allen  $\alpha''\beta''$  und allen  $\alpha'\beta'$ ; und das System aller  $(\alpha\beta)$  besteht aus allen  $\alpha''\beta''$  und aus allen  $\alpha''\beta'$ .  $\alpha + (\alpha - \beta) = \alpha; \alpha - (\alpha + \beta) = \alpha; (\alpha - \beta) + (\alpha - \gamma) = \alpha - (\beta + \gamma)$
- 11)  $\alpha - \alpha = 0, \alpha - \beta = \beta - \alpha; (\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma); \alpha - 0 = 0; (\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma) = \alpha + (\beta - \gamma)$
- 12) Ist  $M$  eine endliche oder unendliche Abelische Gruppe von Metrischen Elementen, welche Multiplikation und Division in bekannt eindeutiger Weise gestatten, mit dem Hauptelement  $0$  ( $0 \cdot 0 = 0$ ) (z.B. die Gruppe aller Idealbrüche  $\alpha, \beta$  eines Endlichen Körpers)
- 13) Es sei für jede der  $2^n$  Combinationsen  $\alpha, \omega$  aus  $1, 2, \dots, n$  (vorläufig ganz willkürlich) ein zugehöriges Element  $(\alpha, \omega)$  der Gruppe  $M$  gewählt.
- 14) Aus jedem dieser  $2^n$  Elementen  $(\alpha, \omega)$  wird, wenn  $\alpha \neq 0$  (es ist eine von  $0$  verschiedene Combination bedeutet, dass der Gruppe  $M$  angehörige Element  $\omega$  unter dem Einfluss

$$\text{und } (\alpha, \omega) = \frac{\prod (\alpha \varepsilon, \omega)}{\prod (\alpha \varepsilon, 0)}$$

gebildet, wo das Produktzeichen  $\prod$  sich im Falle  $\alpha = 0$  auf alle paaren Theile "0", im Neuen auf alle unpaaren Theile  $\omega'$  von  $\omega$  bezieht. Die Definition passt auch auf den Fall  $\omega = 0$ , wenn überhaupt festgestellt wird, dass jedes aus seinem einzigen Factor gebildete Product  $\prod = 0$  (Hauptelement  $0$  soll) sein soll. Ein solches Product aus einem Factor ist dieser Factor selbst.

- 15) Latz I: Haben die Combinationsen  $\alpha, \omega$  von  $M$   $\alpha$  verschieden Durchschnitt, (und sie nicht theilfrei), so ist

$$(\alpha, \omega) = 0. \quad \text{wenn } \alpha - \omega \text{ von } 0 \text{ verschieden.}$$

Beweis: Es gibt ein in  $\alpha$  und in  $\omega$  enthaltenes Element  $\varepsilon$  (Combination ersten Grades) und man kann  $\alpha = \varepsilon \cdot \alpha'$ ,  $\omega = \varepsilon \cdot \omega'$  setzen, wo  $\varepsilon$  nicht in  $\omega$  enthalten ist; dann besteht die  $\omega'$  aus allen  $\varepsilon \varepsilon'$  und allen  $\varepsilon'$ , ebenso die  $\alpha'$  aus allen  $\varepsilon \varepsilon'$  und allen  $\varepsilon'$ ; also definiert  $\alpha \omega'$  alle  $\alpha \varepsilon \varepsilon' = \alpha \varepsilon'$  und alle  $\alpha \varepsilon'$ , ebenso  $\alpha \omega'$  alle  $\alpha \varepsilon \varepsilon' = \alpha \varepsilon'$  und alle  $\alpha \varepsilon'$ ; mit hin-  
stellt die Factorien im Zahler und Nenner mit einander überein, nämlich mit allen  $\alpha \varepsilon'$ ; z.B. bei  $\sum_{n=0}^{\infty} (a)_n x^{n-2} = 3^n$  die Anzahl des (wenn) von  $\alpha$  verschiedenen  $\beta$ ), nur  $\alpha - \beta = 0$ .