Verallgem. eines Theils des Modaltheorie.

Aufgabe. Das einfachste Beispiel zu finden, in welchem

$$m > d \text{ , aber } m\varphi(a\psi d) \text{ und } (m\varphi a)\psi d$$

verschieden sind.

Behauptung: die fünf Elemente

$$a \text{ , } m \text{ , } d \text{ , } m' = a\psi d \text{ , } d' = m\varphi a$$

müssen alle verschieden sein. In (5) ist bewiesen

$$m\varphi m' > d'\psi d \text{ ; } \boxed{\text{also darf nicht } d'\psi d > m\varphi m' \text{ sein!}}$$

Da ferner $m > d$, also $m\varphi d = d$, $m\psi d = m$, so ist

$$m\psi m' = m\psi a \text{ ; } d\varphi d' = d\varphi a .$$

~~Wäre nun 1) $m = d$, so wäre $m' = m\psi a = m\psi m'$, also $m' > m$, $m\varphi m' = m$~~

~~$m\varphi m' = d\varphi m' < d = d'\psi d$ contra hyp.~~ ~~$d' = d\varphi a = d\varphi d'$, " $d' < d$, $d'\psi d = d$~~ } = $m = d$ contra hyp.

~~2) $m' = a$, so wäre $a > d$, $d\varphi a = d$, also $d\varphi d' = d$, also $d' > d$, $d'\psi d = d'$~~

~~$m\varphi m' = m\varphi a = d'$, also $m\varphi m' < d'\psi d$ contra hyp.~~ } contra hyp.

~~3) $m' = d$, so wäre $d = a\psi d$, $d > a$, $d\varphi a = a$.~~

~~$m\varphi m' = m\varphi d = d$, also $d'\psi d > d > m\varphi m'$ $m\varphi m' < d'\psi d$ contra hyp.~~

~~und da $d'\psi d < m\varphi m'$ zufolge (6)~~

~~so wäre (zufolge 1) $m\varphi m' = d'\psi d$ contra hyp.~~

~~4) $m' = m$, so wäre $m\varphi m' = m$, $m = m' = a\psi d > a$, $d' = a$~~

~~und $m = a\psi d$, also $m = m\psi m = a\psi d\psi m = a\psi m$,~~

~~und $m\psi a = m\psi m' = m\psi m = m$, $m > a$, $d' = m\varphi a = a$,~~

~~also $d'\psi d = a\psi d = m' = m$, also $m\varphi m' = d'\psi d$ contra hyp.~~

~~5) $d' = a$, so wäre $d'\psi d = a\psi d = m'$, also $d'\psi d > m\varphi m'$~~

~~Wäre eins der beiden $m, m' <$ (oder also auch $=$) als eins der beiden d', d, so wäre $m\varphi m' < d'\psi d$; wegen $a\varphi b < a < a\psi(b)$~~

Bessere Reihenfolge:

~~1) $m = d$; 2) $m' = a$; 3) $d' = a$; 4) $m' = d$~~

1) $m \leq d$, 2) $m \leq d'$, 3) $m' \leq d$, 4) $m' \leq d'$ unmöglich, weil sonst $m\varphi m' < d'\psi d$ wäre.

5) $m' \lesseqgtr a$, so wäre $m\varphi m' \lesseqgtr m\varphi a = d' < d'\psi d$

6) $d' \gtreqless a$, " " $d'\psi d \gtreqless a\psi d = m' > m\varphi m'$

7) $m > a$, " " $d' = a$; conf. 6)

8) $d < a$, so wäre $m' = a$; conf. 5)

9) $m' \lesseqgtr m$, so wäre (zufolge $m\psi m' = m\psi a$): $m = m\psi a$, $m > a$; conf. 7)

10) $d' > d$, so wäre (zufolge $d\varphi d' = d\varphi a$): $d = d\varphi a$, $d < a$; conf. 8)

Da in jedem Zeichen $<$, $>$ auch $=$ eingeschlossen ist, so sind also alle 5 Elemente d', d, a, m, m' verschieden, wie behauptet war. Das einfachste Beispiel würde man daher erhalten, wenn dieses System von 5 Elementen schon eine vollständige Gruppe bildete, in welcher die Gesetze I, II, III herrschen.

Frage: ist dies möglich? Wenn ja, so muss

$$d'' = d'\varphi d\varphi a\varphi m\varphi m' = d' \text{, und } m'' = d'\psi d\psi a\psi m\psi m' = m'$$

sein. Beweis. Jedenfalls ist (zufolge $m' = a\psi d$, $d' = m\varphi a$)

$$d'' = d'\varphi d \text{ , } m'' = m\psi m' .$$

Wäre nun $d'' = d, a, m, m'$, so wäre auch 10), 6), 1), 3) } Also $d'' = d'\varphi d = d'$; $d'\psi d = d$

" " $m'' = m, a, d, d'$, " " " 9), 5), 1), 2) } und $m'' = m\psi m' = m'$; $m\varphi m' = m$

Also allgemein $d'\varphi x = d'$; $d'\psi x = x$

$x\psi m' = m'$; $x\varphi m' = x$

Ausserdem ist $d\varphi a = d\varphi d' = d'$, $m\psi a = m\psi m' = m'$, womit Alles bestimmt ist.

w. z. b. w.

Nr. 256.

Pr. 8 October 1875. RD.

An

die sämmtlichen Herren Professoren und Lehrer.

Hierdurch ersuche ich Sie, in Zukunft nur die Meldungen derjenigen Studirenden anzunehmen und durch Ihre Unterschrift bestätigen zu wollen, deren Meldungsformular bereits mit der Unterschrift des Abtheilungsvorstandes versehen ist.

Braunschweig, den 5. October 1875.

Der Director des Herzoglichen Collegii Carolini

H. Sommer.

Herrn Professor Dr.

Dedekind

Hirsch

Verallgemeinerung eines Theils der Modultheorie.

System von Elementen $a, b \ldots$

Operation φ mit den Gesetzen (Addition der Moduln; gr. gem. Theiler).

(I) $a\varphi a = a$; $a\varphi b = b\varphi a$; $(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c) = a\varphi b\varphi c = \Phi(a, b, c)$

Operation ψ mit den Gesetzen (kl. gem. Vielf.)

(II) $a\psi a = a$; $a\psi b = b\psi a$; $(a\psi b)\psi c = a\psi(b\psi c) = \Psi(a, b, c) = a\psi b\psi c$

Verbindung zwischen φ und ψ

(III) $(a\varphi b)\psi a = a$; $(a\psi b)\varphi a = a$

Satz: Aus jeder der beiden Thatsachen

(IV) $a\varphi b = a$, $a\psi b = b$

folgt die andere.

Beweis. Aus $a\varphi b = a$ folgt $a\psi b = (a\varphi b)\psi b = b$ nach (III)

" $a\psi b = b$ " $a\varphi b = a\varphi(a\psi b) = a$ " (III)

Drückt man die in (IV) enthaltene Beziehung doppelt durch

(V) $a < b$ oder $b > a$

aus, so gilt der

(3) Satz: Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Beweis. Der Annahme nach ist

$a\varphi b = a$, $a\psi b = b$; $b\varphi c = b$, $b\psi c = c$,

also

$a = a\varphi b = a\varphi(b\varphi c) = (a\varphi b)\varphi c = a\varphi c$, oder ebenso

$c = b\psi c = (a\psi b)\psi c = a\psi(b\psi c) = a\psi c$.

~~Satz. Aus $c > a$ und $c > b$ folgt $c > a\varphi b$~~

~~" $c < a$ " $c < b$, $c <$~~

(4) Satz: Aus $a > a'$ und $b > b'$ folgt

$a\varphi b > a'\varphi b'$ und $a\psi b > a'\psi b'$

~~desgl. $a\varphi b > a'\psi b'$?~~

Beweis. Aus $a\varphi a' = a'$, $b\varphi b' = b'$ folgt (ebenso aus

$(a\varphi b)\varphi(a'\varphi b') = b\varphi a\varphi a'\varphi b' = b\varphi(a\varphi a')\varphi b' = b\varphi a'\varphi b' = a'\varphi(b\varphi b') = a'\varphi b'$

$(a\psi b)\psi(a'\psi b') = (a\psi a')\psi(b\psi b') = a\psi b$

---

(5) Satz. Ist $m > d$, so ist

$m > d$, $a > a$ } $m\varphi a > a\varphi d$

$m\varphi(a\psi d) > (m\varphi a)\psi d$

Beweis. ~~Aus $m = m\psi d$, $d = m\varphi d$~~ Es ist nämlich immer (d.h. ohne Annahme)

$m > m\varphi a$, $a\psi d \overset{>a>}{>} m\varphi a$, $a\psi d > d$

dazu kommt die Annahme $m > d$

Aus $m > m\varphi a$ und $m > d$ folgt $m > (m\varphi a)\psi d$

" $a\psi d > m\varphi a$ " $a\psi d > d$ " $a\psi d > (m\varphi a)\psi d$

} hieraus $m\varphi(a\psi d) > (m\varphi a)\psi d$ w.z.b.w.

Aber aus den bisherigen Annahmen folgt keineswegs die Identität dieser beiden ~~Moduln~~ Elemente!

Ferner Sätze: (2) Allgemein $a\varphi b < a\psi c$

(2') $a\varphi b < a$, $a\psi b > a$ } $a\varphi b < a\psi b$

(1) Aus $a < b$ und $a > b$ folgt

$a = b$

Beweis. $a = a\varphi b$, $b = a\varphi b$ } und

Hypothesen

1) $d > m$; $d \psi d' > d > m > m \varphi m'$

2) $d' > m$; $d \psi d' > d' > m > m \varphi m'$

3) $d > m'$; $d \psi d' > d > m' > m \varphi m'$

4) $d' > m'$; $d \psi d' > d' > m' > m \varphi m'$

~~5) $m > a$; d'~~

5) $a > m'$; $m' = a \psi d > a$, also $m' = a$; $m \varphi m' = m \varphi a = d' < d \psi d'$

6) $d' > a$; $d' = m \varphi a < a$, also $d' = a$; $d \psi d' = d \psi a = m' > m \varphi m'$

(7) $m > a$; $d' = m \varphi a = a$, wie 6)

(8) $a > d$; $m' = a$, wie (5)

9) $m > m'$; also, da $m' > a$, auch $m > a$, wie 7)

10) $d' > d$; also, da $a > d'$, auch $a > d$, wie (8)

Alles dies selbst ohne die Annahme $m > d$.

Herrn
Professor Dr. Dostler,
Hochwohlgeb.
ergebst.