$\mathfrak{a} = [a, c + d\omega]$; $m\omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$; $m\omega = pa + q(c + d\omega)$

$b = ap + cq$; $m = dq$

$a = ea' \}\ q = xa'$
$c = ec' \}\ p = -xc'$

$m = x \cdot da' = x \cdot n$

$[a, c] = [e]$ $\quad [1, \frac{c}{a}] = [\frac{1}{a'}]$

$[\frac{1}{d}, \frac{c}{ad}] = [\frac{1}{da'}] = [\frac{1}{n}]$

$[a, e] = [\frac{ad}{n}]$

$[\frac{c}{a}, \frac{d}{n}] = [\frac{c'}{a'}, \frac{1}{a'}] = [\frac{1}{a'}]$

$pn = ad$
$pda' = ad$; $p = e$

$\mathfrak{a} = [a, c + d\omega] = \cancel{[p + q\omega, n\omega]}$; $n = da'$, $p = e$; $a = ea'$
$= [a' + b'\omega, d'\omega]$

$a' + b'\omega = pa + q(c + d\omega)$
$d'\omega = ra + s(c + d\omega)$ $\}$ $ps - qr = e = \pm 1$

$a' = ap + cq$; $b' = dq$
$b = ar + cs$; $d' = ds$

$a'd' = (ap + cq)ds - (ar + cs)dq = ad \cdot e$

$e = +1$

$a = a's$, $b =$ $\quad [a, c] = [a']$
$c = -a'r$, $d = -b'r + d'p$

Braunschweig, am 25. October 1890.

Ew. Hochwohlgeboren

beehren wir uns ergebenst anzuzeigen, daß wir das seither unter der Firma

Hahn & Hentze

bestandene Leinen-, Wäsche- und Ausstattungsgeschäft am heutigen Tage übernommen und unter der alten Firma in unveränderter Weise fortführen werden.

Unsere langjährige Thätigkeit in ersten Specialgeschäften der Branche befähigt uns, den höchsten Ansprüchen Genüge zu leisten; auch werden wir eifrig bestrebt sein, durch zuvorkommende und reelle Bedienung das Vertrauen, welches Ew. Hochwohlgeboren dem Hause bisher geschenkt haben, in jeder Beziehung zu rechtfertigen.

Wir bitten um die Ehre Ihres Besuches und begrüßen Sie

mit vorzüglicher Hochachtung

Carl E. Henke
Karl König
in Firma: Hahn & Hentze.

$\mathfrak{a} = [a, c + d\omega]$; $(p + q\omega)x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$

~~$px =$~~ $(p + q\omega)x = au + (c + d\omega)v$

$px = au + cv$; $qx = dv$

$\mathfrak{a} = [a, c + d\omega]$

$\mathfrak{o} = [1, \omega]$

$\mathfrak{a}' = [a, c + d\omega, p + q\omega]$

$(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{a}')(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$

$(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = ad$; $(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}') = \frac{ad}{n}$; $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}) = n$

α	$g(\alpha)$
1	a
ω	$\frac{ad}{a'}$; $[a, c] = [a']$

$[d, q] = [e]$; $d = ed'$, $q = eq'$; $q'x = d'v$

$x = d'y$; $v = q'y$ $\quad [pd' - cq', a] = [f]$

$pd'y = au + cq'y$

$(pd' - cq')y = au$

$a = fa'$

$y = a'z$

$x = a'd'.z$

$n = a'd' = \frac{ad}{ef}$

$[pd - cq, ae] = [ef] = [\frac{ad}{n}]$

$[pd - cq, ad, aq] = [\frac{ad}{n}]$; $n = g(p + q\omega)$

$a = 10$; $c = 6$; $d = 15$; $ad = 150$

p	$g(p + \omega)$
0	75
1	150
~~2~~	~~75~~
~~3~~	~~150~~
~~4~~	~~75~~

q	$g(1 + q\omega)$
0	10
1	150
2	150
3	50
4	150
5	30
6	50
7	150
8	150
9	150
10	30
11	150
12	50
13	150
14	150

$[150, 15p - 6q, 10q] = [\frac{150}{n}]$;

$q = 1$; $[10, 15p - 6] = [10, 5p - 2] = [\frac{150}{n}]$; $n = g(p + \omega)$

$p = 1$; $[150, 3(5 - 2q) - 6q, 10q] = [\frac{150}{m}]$; $m = g(1 + q\omega)$

~~$p = 2 + 5\omega$~~ $p = 2$, $q = 5$

$[150, 0, 50] = [50]$; $g(2 + 5\omega) = 3$

$g(1 + 2\omega) = 150$

$1 + 2x + (2 + 5x)\omega$

$p = 1 + 2x$, $q = 2 + 5x$ $\quad 5p - 2q = 1$

$150, 3, 10(2 + 5x)$

$x = 2$; $p = 5$, $q = 12$. $[150, 3, 120] = [3]$; $g(5 + 12\omega) = 50$

Allgemein

$c = hc'$, $d = hd'$ $\quad dc' - cd' = 0$

$\beta = c' + d'\omega$

$[ad, ad', 0] = [ad']$; $g(c' + d'\omega) = h$

$d'p - c'q = 1$; $dp - cq = h$

$[ad, aq, h] = [aq, h]$

$c'q \equiv 1 \pmod{d'}$

$aq \equiv 0 \pmod{h}$ $\quad$ nicht allgemein möglich

31

$[a, c] = [a']$; $[a, c, d] = [a', d] = [m]$

d. h. g. A. gem. $a = \frac{aa'}{a'}$ und $\frac{ad}{a'}$, r. f. gem. $m\frac{a}{a'} \cdot \frac{a'}{m}$ u. $m\frac{a}{a'} \cdot \frac{d}{m}$

ist $m\frac{a}{a'} \cdot \frac{a'}{m} \cdot \frac{d}{m} = \frac{ad}{m}$

Wenn nun $g(p + q\omega) = \frac{ad}{m}$ werden, so müssen g_1, g so gut, wahr werden, daß

$[ad, aq, dp - cq] = [m] = [a, c, d]$

wird. Man setze werden

$a = ma_1$, $c = mc_1$, $d = md_1$ $\quad [a_1, c_1, d_1] = [1]$

$[ma_1 d_1, a_1 q, d_1 p - c_1 q]$ soll $= [1]$

$q = 1$; p schreiben durch alles in a, nach. Rechnung die nicht in c, aufsuchen

p in Gleichung

$[c, d] = [e]$; $dp_0 - cq_0 = e$

$dp - cq = ex$

$d(p - xp_0) = c(q - xq_0)$

$p = xp_0 + \frac{c}{e}y$; $q = xq_0 + \frac{d}{e}y$

$[ad, a(xq_0 + \frac{d}{e}y), ex] = [a, e]$

Zweigliedriger Modulus

ω irrational; $\mathfrak{o} = [1, \omega]$; $\mathfrak{m} = m[a, c+d\omega]$; $(m, \mathfrak{m}) = 1$; $(\mathfrak{o}, m) = m^2 ad$; $[a, c, d] = [1]$

Man wähle die ganze rationale Zahl x so, daß $c' = c - dx$ rel. prim. zu a wird. Hierzu nehme man x ein Primzahlprodukt, welches durch jede in a aufgehende Primzahl, zu welcher diese in c aufgeht oder nicht

Ist p eine in a aufgehende Primzahl, so hat die Kongruenz $dx \equiv c \pmod{p}$ keine Wurzel x, wenn p in d aufgeht
eine Wurzel x, wenn p nicht in d aufgeht.

Es wird also $c' = c - dx$ durch p für p verschiedene Werthe $x \pmod{p}$, wenn p in d aufgeht
für $p-1$ " " " " " " p nicht in d aufgeht

oder c' durch p für p^r mögliche Werthe
" $p^{r-1}(p-1)$ " " $\Big\}$ mod. p^r

$a = \Pi p^r \cdot \Pi q^s$; p geht auf in d; q geht nicht in d auf

Anzahl der (mod. a) incongr. Zahlen x, für welche $c' = c - dx$ rel. prim. zu a wird

$= \Pi p^r \cdot \Pi q^{s-1}(q-1) = d'\varphi(a')$; $a = d'a'$

a' die größte in a aufgehende Zahl, die rel. prim. zu d ist

und setze $\omega' = x + \omega$, so wird

$\mathfrak{o} \in [1, \omega']$, $\mathfrak{m} = m[a, c' + d\omega']$

$u + v\omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$: $u + v\omega = max + m(c+d\omega)y$
$u = m(ax + cy)$, $v = mdy$
$du - cv = madx$

also $\left.\begin{matrix} du - cv \equiv 0 \\ av \equiv 0 \end{matrix}\right\}$ mod. mad.

$\mathfrak{m} + [p + q\omega] = [ma, m(c+d\omega), p+q\omega]$ $\qquad$ $c - dx$ rel. prim. zu a

$\mathfrak{m} + [x+\omega] = [ma, m(c+d\omega), x+\omega] = [ma, mc - mdx, x+\omega] = [m, x+\omega] = \mathfrak{m}'$

$(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}') = m$; $(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}) = mad$ $\Big|$ $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} + [\omega'] = [ma, mc' + md\omega', \omega'] = [m, \omega']$

$\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m} + [a] = [ma, m(c'+d\omega'), a] = [a, m(c'+d\omega')]$

~~$(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}'') = a$, $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{m}) =$~~

Dann ist $\qquad$ $(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}'') = ad$; $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{m}) = m$

$au + \omega' v \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$; $au + \omega' v = hma + k(mc' + md\omega')$

$au = mah + mc'k$
$v = mdk$

$m \equiv n\omega' \pmod{\mathfrak{m}}$ $\qquad$ $md\omega' \equiv -mc' \pmod{\mathfrak{m}}$

$m - n\omega' = m(pa + q(c' + d\omega'))$

$m = mpa + mqc'$; $-n = mqd$

$1 \cdot m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}'}$ $\qquad$ $ap + c'q = 1$

$m \equiv n\omega' \pmod{\mathfrak{m}}$ $\qquad$ $\omega' = x + \omega$ $\qquad$ $1 = -qd\omega' + \omega''$

$m \equiv -mqd\omega' \pmod{\mathfrak{m}}$ $\qquad$ $u\omega' + v\omega''$ $\qquad$ $\omega'' = 1 + qdx + qd\omega$ $\qquad$ $\omega = (1 + qdx)\omega' - x\omega''$

$\omega'' \equiv 1 + qd\omega' \pmod{\mathfrak{m}}$ $\qquad$ $1 + qdx \equiv cq \pmod{a}$ $\qquad$ $\omega'' \equiv q(c + d\omega) \pmod{a}$

$\omega'' = 1 + qd\omega'$; $c'q \equiv 1 \pmod{a}$; $(c - dx)q \equiv 1 \pmod{a}$ $\qquad$ $\omega''' = c + d\omega$

$\omega^{IV} = x + \omega$

Modulu m, $a = m + [\alpha]$, $b = m + [\beta]$, $\vartheta = m + [\alpha] + [\beta] = a + [\beta] = b + [\alpha] = a + b$

$(a, m) = a$; $(b, m) = b$; $(\vartheta, a) = b'$; $(\vartheta, b) = a'$

$(\vartheta, m) = (\vartheta, a)(a, m) = (\vartheta, b)(b, m) = ab' = b\,a'$

$a\alpha \equiv 0 \pmod{m}$; $b'\beta \equiv 0 \pmod{a}$; $b'\beta \equiv -a''\alpha \pmod{m}$; $a''\alpha + b'\beta \equiv 0 \pmod{m}$

$b\beta \equiv 0 \pmod{m}$; $a'\alpha \equiv 0 \pmod{b}$; $a'\alpha \equiv -b''\beta \pmod{m}$; $a'\alpha + b''\beta \equiv 0 \pmod{m}$

~~$b = b'b_1$; $a''b_1$~~ $b = mb'$; $ma''\alpha \equiv 0 \pmod{m}$; $ma'' \equiv 0 \pmod{a}$; $a'' = na'$

$a = ma'$; $mb''\beta \equiv 0$ " $mb'' \equiv 0 \pmod{b}$; $b'' = n'b'$

$$\left.\begin{aligned} na'\alpha + b'\beta &\equiv 0 \\ a'\alpha + n'b'\beta &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{m} \quad -nn'b'\beta + b'\beta \equiv 0 \pmod{m} \; ; \; nn' \equiv 1 \pmod{m}$$

$$\left.\begin{aligned} (a, b) &= (\vartheta, b) = (a, a-b) = a' \\ (b, a) &= (\vartheta, a) = (b, a-b) = b' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (\vartheta, m) &= (\vartheta, b)(b, a-b)(a-b, m) = a' \\ &= (\vartheta, a)(a, a-b)(a-b, m) = \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} b &= (b, m) = (b, a-b)(a-b, m) = b'(a-b, m) \\ a &= (a, m) = (a, a-b)(a-b, m) = a'(a-b, m) \end{aligned}\right\} \quad (a-b, m) = m$$

$a - b = m + [a'\alpha] = m + [b'\beta]$

$[\alpha, \beta] - m = [na'\alpha, na'\alpha + b'\beta] = [a'\alpha + n'b'\beta, mb'\beta]$ $\qquad nn' = 1 + mm'$

$ma'\alpha = m(a'\alpha + n'b'\beta) - n'(mb'\beta)$ $\qquad nn'b'\beta = b'\beta + m'(mb'\beta)$

$na'\alpha + b'\beta = n(a'\alpha + n'b'\beta) - m'(mb'\beta)$ $\qquad n^*a'\alpha = n^*a'\alpha$

$([\alpha, \beta], m) = (\vartheta, m) = ([\alpha, \beta], [\alpha, \beta] - m) = ma'b'$

30

Andere Bezeichnung:

r statt m ; $a = [\alpha]$, $b = [\beta]$, und dann die Beziehung aus der allgemeinen Theorie der drei Moduln a, b, r !!!