

XXVII - Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen - Brouillon du commentaire de Dedekind

Auteurs : Richard Dedekind

Les folios

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

9 Fichier(s)

Citer cette page

Richard Dedekind, XXVII - Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen - Brouillon du commentaire de Dedekind, 1876

Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 01/10/2025 sur la plate-forme EMAN :
<https://eman-archives.org/DWR/items/show/14>

Droits

DroitsFiche : Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle). Licence Creative Commons Attribution - Partage à l'Identique 3.0 (CC BY-SA 3.0 FR).

Présentation

Date1876

Auteur(s)Richard Dedekind

LangueAllemand

SourceCod. Ms. B. Riemann 4, p. 25-29

Format9 f.

Nature du documentBrouillon, version envoyée à Weber.

Description & Analyse

DescriptionBrouillon du commentaire de Dedekind envoyé à Weber en février 1876.

Sujets

[fonction eta](#), [fonctions elliptiques](#), [fonctions modulaires](#), [nombres modulaires](#)

Les relations du document

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.□

Notice créée par [Emmylou Haffner](#) Notice créée le 18/07/2022 Dernière modification le 04/10/2023

(Vergleiche 1150)

Die fortgesetzte Betrachtung der beiden
geordneten Paare (Modul-Systeme
ad 1150) zeigt es sich, dass die
man darauf abgibt, dass die
Funktionen zu finden, die in der Regel in
jedem Falle auftritt, und es
ist möglich, dass die gleiche Ausdrucksform,
welche einem bestimmten Modul-System
entspricht, auch in einem anderen
Modul-System vorkommt. Die hier
gegebene Darstellung der Modul-Systeme
ist diejenige, die in der Theorie
der elliptischen Funktionen auftritt, und
es ist zu bemerken, dass die
beiden Modul-Systeme, die hier
betrachtet werden, in der That
gleichartig sind.

$$\omega = \frac{2\pi i}{K} = \frac{2\pi i}{K'}$$

Es seien zwei verschiedene Modul-Systeme, ω und ω' ,
welche in der Theorie der elliptischen Funktionen auf
treten. Die Funktionen, die in der Theorie der
elliptischen Funktionen auftritt, sind die
Funktionen, die in der Theorie der
elliptischen Funktionen auftritt, und
es ist zu bemerken, dass die
beiden Modul-Systeme, die hier
betrachtet werden, in der That
gleichartig sind.

Die Modul-Systeme der Theorie der
elliptischen Funktionen, welche in der
Theorie der elliptischen Funktionen
auftritt, sind die Funktionen, die in
der Theorie der elliptischen Funktionen
auftritt, und es ist zu bemerken,
dass die beiden Modul-Systeme, die
hier betrachtet werden, in der That
gleichartig sind.

$$\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} dx,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} dx$$

Es ist zu bemerken, dass die
beiden Modul-Systeme, die hier
betrachtet werden, in der That
gleichartig sind.

Die Fortsetzung über die langweiligen
Themen

Die Fortsetzung über die langweiligen
Themen

in einem der Punkte logarithmisch, in jeder
 zusammenhängenden Gebietes nirgends Null
 oder unendlich groß wird, so sind auch alle
 Potenzen von $\eta(\omega)$ und beliebigen Logar-
 nithmen, und also $\log \eta(\omega)$ selbst eine
 merkm. Functionen von ω , sobald ich
 Kenntn. an einer bestimmten Stelle fest-
 gesetzt ist. Die Function $\log \eta(\omega)$ soll
 daher definiert werden, daß, wenn η
 über alle Grenzen wächst, also $\eta = e^{\frac{1}{2}\pi i \omega}$,
 unendlich klein wird,

$$\log \eta(\omega) = \frac{\omega \pi i}{2} = 0$$

ist. Dies ist bekanntlich (Fundam.
 von § 36)

$$\eta(\omega) \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}\pi i \omega} \eta(\omega)^3$$

$$\sqrt[3]{h} = e^{\frac{1}{2}\pi i \omega} \cdot \sqrt[3]{\eta(\omega)} \cdot \frac{\eta(\omega)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}$$

$$\sqrt[3]{h'} = e^{\frac{1}{2}\pi i \omega} \cdot \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{h}{h'}} = e^{-\frac{1}{2}\pi i \omega} \cdot \frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)^2}{\eta(\omega)},$$

also folgen die obigen Differentialgleichungen

Logarithmen

$$\begin{aligned} \log \eta(\omega) + \log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) + \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) \\ = \frac{\pi i}{2} + 3 \log \eta(\omega) \end{aligned}$$

und

$$\log h = \log 4 + \frac{\pi i}{6} + 4 \log \eta(\omega) - 4 \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)$$

$$\log h' = \frac{\pi i}{6} + 2 \log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4 \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)$$

$$\log \frac{h}{h'} = -\frac{\pi i}{6} + 4 \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) - 2 \log \eta(\omega),$$

in der Logarithmen-Formel (wie in der
 Fundam. von § 36) Wurzeln aus merkm. Functionen
 von ω so definiert sind, daß

$$\log h - \log 4 = \frac{\omega \pi i}{2} = \log h - \log 4 \sqrt[3]{q},$$

$$\log h' \text{ mit } \log \frac{h}{h'}$$

mit η unendlich klein werden. Und diese
 Eigenschaften der Functionen ergibt sich aus
 mit Hilfe der Transformationen 1. u. 2. Ordnung
 der η -Functionen (s. Fundam. von § 36)
 aufeinander zu setzen wollen, wobei
 unter Kenntn., also bei Kenntn. von

η an einer bestimmten festsitzenden Stelle η_0 (die im nächsten Abschnitt betrachtet werden wird) zu setzen, so erhält man die Gleichung (10).

$$\begin{aligned}
 S_1(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right)^n \eta_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)^n \eta_0 \\
 &= 2\eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i k \omega}) (1 - e^{-2\pi i k \omega})
 \end{aligned}$$

Es ist, wenn man die auf ω gemachten ω der, ω ist, dann man ω bezieht,

$$S_1(\omega) = 2\pi \eta(\omega)^2.$$

Sind nun x, β, γ, δ die der Bedingung

$$x\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen, so ist bekanntlich,

$$S_2(x, \frac{\beta + \gamma\omega}{\alpha + \beta\omega}) =$$

$$c \sqrt{\alpha + \beta\omega} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta\omega} S_1((\alpha + \beta\omega)x, \omega),$$

wo c eine von x, β, γ, δ mit der Wahl des η , η abhängige abhängige auf ω festsitzende Funktion bedeutet, deren Bestimmung von Kummer auf die Eigenschaften der Funktionen η zurückgeführt ist (in Kummer's Journal, Serie II. T. III. 1858).

$$S_1(0, \frac{\beta + \gamma\omega}{\alpha + \beta\omega}) = c (\alpha + \beta\omega)^{\frac{1}{2}} S_1(0, \omega)$$

$$\text{also } \eta\left(\frac{\beta + \gamma\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = c^{\frac{1}{2}} (\alpha + \beta\omega)^{\frac{1}{4}} \eta(\omega).$$

Man kann daher, wenn $\beta \neq 0$ ist,

$$\log \eta\left(\frac{\beta + \gamma\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = \log \eta(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{\alpha + \gamma\omega}{\beta} + \frac{1}{4} \log(\beta^2) + \frac{\log c}{2}$$

setzen, wo die eingezeichneten Punkte

$$\log \frac{\alpha + \gamma\omega}{\beta} = \log(y - x + \beta x i)$$

so definiert werden soll, daß β imaginär oder reell positiv den Grenzwert $\frac{1}{2}\pi$ liegt, während $\log(\beta^2)$ reell zu nehmen ist; dann wird η eine Funktion x, β, γ, δ werden, die festsitzende ganze Zahlen sein, welche dieselbe bleibt, wenn diese vier Zahlen mit ± 1 multipliziert werden. Die vollständige Bestimmung dieses ganzen η ist leicht offenbar auf unendlich viel mehr, weil die Bestimmung des obigen festsitzenden Moduls c .

Das ist zu erwarten, da man $\omega = x + \beta u$ rationalen, in Klammern gesetzten ausgedrückten Werten $\frac{x}{\beta}$ auf so annehmen, daß ω mit q auf

$$\frac{(x + \beta u)^2}{q}$$

kleinst klein wird, so wird

$$\omega^2 = \frac{x^2 + \beta^2 u^2}{x + \beta u} = \frac{x^2}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta(x + \beta u)}$$

da ω kleinste groß, daß

$$q^2 = 1 \cdot \omega^2$$

kleinst klein, und folglich auf

$$\log q(\omega^2) = \frac{\omega^2 x^2}{x^2} = 0$$

wird. Bei dieser Annahme wird mit

$$0 = \log q(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{x + \beta u}{\beta} + \frac{1}{2} \log(\beta^2)$$

$$\left(+ \frac{h\pi i}{12} - \frac{2\pi i}{12\beta} \right) + \frac{\pi i}{12\beta(x + \beta u)}$$

ist die in der Theorie der Funktionen von den beiden Zahlen x, β abhängende, so kann man

$$h\beta - x - \beta^2 = (-x, \beta)$$

setzen, wo $(-x, \beta)$ eine beliebige von den beiden beliebigen Funktionen x, β abhängende ganze Zahl bedeutet, durch deren Einführung die Voraussetzung, daß die klein

mit ω zusammen die beiden letzten

$$0 = \log q(\omega) + \frac{1}{2} \log$$

$$0 = \log q(\omega) + \frac{\pi i}{12n(m-n)} + \frac{1}{2} \log \frac{n\omega - m}{m}$$

$$+ \frac{1}{2} \log(n^2) + \frac{(m, n) - mn}{12n} \pi i$$

annehmen, wo m und $n \geq 0$ zwei beliebige natürliche Funktionen bedeuten, mit denen, mit denen, man annehmen wird, daß $\frac{m}{n}$ die angegebenen Werte auf dem Intervall $\frac{m}{n}$ auftritt, nämlich so, daß mit q auf

$$\frac{(nx - m)^2}{q}$$

kleinst klein wird. Folglich man m, n durch $-m, -n$, so ergibt sich

$$(-m, -n) = -(m, n);$$

es ist dann folgt aus der obigen Definition $x\omega$ Symbol $(-x, \beta)$, weil h eine ganze Zahl und $x\omega^2 \equiv 1 \pmod{\beta}$ ist, allgemein

$$m(m, n) \equiv m^2 + 1 \pmod{n}.$$

Folglich nimmt die obige Gleichung für die Transformationen erster Ordnung der Funktionen

$\log \eta(\omega)$ die folgende Form an

$$\log \eta \left(\frac{\beta + i\omega}{\alpha + i\omega} \right) =$$

$$\log \eta(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{\alpha + i\omega}{\beta + i\omega} + \frac{1}{2} \log(\beta^2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha(\beta) + \alpha + \beta^2}{\pi \beta} \pi i.$$

Die Brückensatz - Logarithmen der Dignität (m, n) ergibt sich aus der folgenden Weise. Aus der Definition von $\log \eta(\omega)$ folgt unmittelbar

$$\log \eta(1 + \omega) = \log \eta(\omega) + \frac{\pi i}{2n};$$

Die Annahme von ω aus $\frac{m}{n}$ liefert sich aus $1 + \omega$ den Wert $\frac{m+n}{n}$, welches ebenfalls in den Brückensatz ausgedrückt ist, und folglich wird auf dem obigen Brückensatz - Satz

$$0 = \log \eta(1 + \omega) + \frac{\pi i}{2n(m+n)} + \frac{1}{2} \log \frac{m+n}{n} + \frac{1}{2} \log(m^2) + \frac{(m+n, n) - (m+n)}{2n} \pi i,$$

gemäß der Gleichung

$$(m+n, n) = (m, n),$$

also allgemein

$$\left. \begin{aligned} (m^1, n) &= (m, n) \\ \text{wegen } m^1 &= m \text{ (mod. } n) \end{aligned} \right\}$$

folgt. Aus dem allgemeinen Transformationsatz ergibt sich ferner

$$\log \eta \left(\frac{1}{\omega} \right) =$$

$$\log \eta(\omega) + \frac{1}{2} \log(-\omega i) + \frac{(m\sigma, 1)\pi i}{2n},$$

Wobei, da für $\omega = i$

$$(0, 1) - (m, 1) = 0$$

folgt,

$$\log \eta \left(\frac{1}{\omega} \right) = \log \eta(\omega) + \frac{1}{2} \log(-\omega i);$$

ausdrückt man ferner ω den Wert $\frac{m}{n}$, also $\frac{1}{\omega}$ den Wert $\frac{n}{m}$, so ergibt sich, wenn m ebenfalls von Null verschieden ist, aus dem Brückensatz - Satz

$$0 = \log \eta \left(\frac{1}{\omega} \right) + \frac{\omega \pi i}{2n(m+n)} + \frac{1}{2} \log \frac{m+n}{m} + \frac{1}{2} \log(m^2) + \frac{(n, m) + n}{2m} \pi i;$$

Daß die Gleichung mit dem aufgestellten Brückensatz - Satz unter genauer Beachtung der über die Logarithmen gemachten Voraussetzungen ergibt sich das Resultat

$$m(m, n) - n(-2, m) = 1 + m^2 n^2 + 2mn,$$

so daß man oder anders herum zu bestimmen ist, ob man $m^2 n^2$ positiv oder negativ ist.

Bestehen ist, nur eine spezielle Fall der folgenden,
 quadratischen, wenn man in dem all-
 gemeinen binomischen, setzen die Be-
 zeichnung für den Rest m annehmen lässt.
 Sind m, n mit m', n' zwei Paare ganzer,
 teilerfremder Zahlen, so existiert genau

$$m'' = \frac{m' - m}{m' - m} \quad m' - m''$$

und gilt für m'' die Kongruenzen

$$\begin{aligned} m' m'' &= 1 \pmod{m} \\ m' m'' &= 1 \pmod{n} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$m m' (m'', n'') = m' m'' (m, n) + m m'' (m', n')$$

$$= m' + n' + m m'' \frac{m' - m}{m' - m} = m' + n' + m m''$$

wo das obere oder untere Zeichen zu setzen ist,
 je nachdem $m m''$ positiv oder negativ ist.
 Oben offenbar ist der Rest der Quotient (m, n)
 genau durch die größt-gemeinsame Teilzahl m, n ständig
 bestimmt, und man erhält aus derselben offenbar
 durch eine Reihe von Resten - fortsetzung.
 Es ergibt sich außerdem, dass allgemein

$$(-m, n) = -(m, n)$$

$$(m, -n) = -(m, n)$$

Man kann ferner ohne Veränderung dieses Satzes
 den Exponenten die Bedeutung des Exponenten
 (m, n) auf den Fall $m = 0$ ausdehnen,
 indem, da m stets teilerfremd ist zu
 n sein soll, $m = \pm 1$ folgt, und es ergibt
 sich

$$(\pm 1, 0) = \pm 1$$

Es ist ferner allgemein

$$(m', n) = (m, n)$$

$$m m' m'' = 1 \pmod{n}$$

Diese letzten (m, n) bezeichnen die nachherdige,
 kleinste positive Restzahl, aber
 es ist nicht leicht, einen allgemeinen Ausdruck
 für dieselben zu finden. Mit Hilfe der ge-
 rade in dem gegebenen Kongruenz ausgedr.
 Masse der Zahl a aber, einen solchen Ausdruck
 in einem einheitlichen Ausdruck aufzustellen.
 Es ist a ein gegebenes oder bestimmtes,
 man hat dann die Kongruenz von a an

$$ax - \frac{a}{n} = q^2 = \frac{a^2}{n^2}$$

$$q^2 = \frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n^2}$$

Setzt man $ax - \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2}$

$$x = \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n^2}$$

ist Gleichung erfüllt

Es ist, die erste dieser beiden Folgen kann auf dieselbe
 abgeleitet werden, dass $\log \eta(-u)$ mit $\log \eta(u)$
 zusammenhängt, wenn u , die mit u conjugierte
 komplexe Größe bedeutet.

Bemerkung.

Die Theorie der Charaktereigenschaften von Ketten-
 reihen über die ganze Zahl mit $\eta(u), \eta(-u), \chi(u)$
 bezeichneten Funktionen ist in der Schrift,
 P. (sur la théorie des équations modulaires) 1859

Es gilt der folgende Satz:

$$\log \eta(w) = \frac{w\pi i}{12} + \sum \log(1 - q^{12v})$$

$$= \frac{w\pi i}{12} + \sum \log(1 - r^v \alpha^{mv}),$$

Wird die Logarithmenreihe für $\pi = 0$ geschrieben, so erhält man die oben angegebene Reihe, oder auf die Umformung von Jacobi (Sund. Nova 309)

$$\log \eta(w) = \frac{w\pi i}{12} - \sum \frac{1}{v} \frac{r^v \alpha^{mv}}{1 - r^v \alpha^{mv}},$$

wo v wieder alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Man setze nun r eine Wurzel 1, so wird auf die obige Umformung Folger

$$0 = - \sum \frac{1}{v} \frac{r^v \alpha^{mv}}{1 - r^v \alpha^{mv}} + \frac{\pi^2}{6w^2 \log r} + \frac{1}{2} \log \log \frac{1}{r}$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{\pi^2}{6w^2} + \frac{(m, n) \pi i}{12n},$$

wo alle Logarithmen + null π verschwinden, worauf die Überlegung zu der entsprechenden Größengleichung gleichgültig

$$0 = - \sum \frac{1}{v} \frac{r^v \alpha^{mv}}{1 - r^v \alpha^{mv}} + \frac{\pi^2}{6w^2 \log r} + \frac{1}{2} \log \log \frac{1}{r}$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{\pi^2}{6w^2} - \frac{(m, n) \pi i}{12n},$$

folgt für $\pi = 1$

$$\sum \frac{1}{v} \frac{r^v \alpha^{mv}}{1 - r^v \alpha^{mv}} = \sum \frac{1}{v} \frac{r^v \alpha^{mv}}{1 - r^v \alpha^{mv}} - \frac{(m, n) \pi i}{6n}$$

oder

$$\lim \sum \frac{a_v}{v} = \frac{(m, n) \pi i}{6n},$$

wo die Überlegung

$$a_v = \frac{1}{1 - r^v \alpha^{mv}} - \frac{1}{1 - r^v \alpha^{mv}}$$

gefolgt ist. Es läßt sich nun zeigen, daß die Reihe

$$\sum \frac{a_v}{v}$$

wegen ihrer Glieder auf gewissen v gleich Null wird, und auf was für $v = 1$ konvergiert und an dieser Stelle stetig ist, folgt für die Potenzreihe

$$\sum \frac{a_v}{v}$$

daß, wo a_v den Wert a_v für $v = 1$ annimmt, gesondert betrachtet werden. Dies ist dann wegen der zu zwei Gliedern a_v , welche den Indizes $v = (d+1)n + 1$ und $v = (d+1)n + 2$ entsprechen, erfüllt, weil man zeigen kann, daß der Modulus der Reihe

$$A_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v$$

für alle Werte von v inclusive $v = 1$ unterhalb einer von v unabhängigen, endlichen Konstanten bleibt, voraus die obige Bedingung

$$0 < \alpha < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

100

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$
$$\frac{1}{4} = \int_2^4 x^{-1/2} dx$$
$$\frac{(m, n) \pi i}{6n} = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x^n} \frac{dx}{x},$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j x^j$$

$$\frac{(m, n)_{\infty}}{6} = - \sum f(z^{-nt}) \log(1 - z^{nt}),$$

$$= \pi i \left(\frac{m^2}{n} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{1 - \alpha_{\text{HCl}}} = \frac{1}{74} \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{\alpha_i} \quad \text{HCl}$$
$$a_p^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^* \exp(-\mu_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^* \exp(\mu_i)$$
$$f(x^{-m}) = \sum \alpha_j^* x^{-mj} = |t| - |t|,$$

about the Department of the Interior.

gegeben, wie oben gezeigt wird, ist es möglich
ist,

$$\frac{(m, n)}{6} = \sum_{k=1}^n |H_k - 1| \left(\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right) \right), = 24 \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right) \right) \left(\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

Es ist ein ganzes, das das System (mod. 6) zu
bestimmen ist. Diese (mod. 6) für (m, n) in
den ersten sechs Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13)
formiert und die Werte gemittelt, das ergibt
das ist für die ersten sechs Primzahlen
aufeinanderfolgend, die die ersten sechs Primzahlen
für $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$, $\log 7$, $\log 11$, $\log 13$ aus der gegebenen
Anzahlung abgeleitet, was keine Schwierig-
keit darstellt, da in diesen Primzahlen auf
 $\log 2$ zurückgeführt wird, und die Anzahlung
von $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$, $\log 7$, $\log 11$, $\log 13$ sich
leicht aus der von $\log 2$ ergibt, wenn
man die gegebenen Werte, wie m, n in
Bezug auf die Modulus 2 in die ersten sechs
Primzahlen.

Es ist aber für die ersten sechs Primzahlen
nicht möglich, die ersten sechs Primzahlen
zu geben.

