

XXVII - Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen - Transcription de Weber

Auteurs : Heinrich Weber ; Bernhard Riemann

Les folios

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

7 Fichier(s)

Citer cette page

Heinrich Weber ; Bernhard Riemann, XXVII - Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen - Transcription de Weber, 1876

Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 01/10/2025 sur la plate-forme EMAN :
<https://eman-archives.org/DWR/items/show/8>

Droits

DroitsFiche : Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle). Licence Creative Commons Attribution - Partage à l'Identique 3.0 (CC BY-SA 3.0 FR).

Présentation

Date1876

Auteur(s)

- Bernhard Riemann
- Heinrich Weber

Langue

- Allemand
- Latin

SourceCod. Ms. B. Riemann 4, p. 1-9

Format8 f.

Nature du documentTranscription (Weber) secondaire

Description & Analyse

DescriptionTranscription des manuscrits de Riemann par Weber (d'après celle de Dedekind). Vraisemblablement la version envoyée pour impression.

Sujets

[fonctions elliptiques](#), [fonctions modulaires](#)

Les relations du document

Collection ** Hors collections **

[XXVII - Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen - Transcription de Dedekind](#) *suivant ce document*

[Afficher la visualisation des relations de la notice.](#)

Notice créée par [Richard Walter](#) Notice créée le 18/10/2021 Dernière modification le 03/11/2022

Intégrales et dérivées (Fonctions hyperboliques)

Remarque sur les propriétés, et sur les relations entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies.

Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies. Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies.

$$181) \int_0^1 (x - \log x) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$182) \int_0^1 x \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$183) \int_0^1 x \log^2 x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$184) \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$185) \int_0^1 \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$186) \int_0^1 \log^2 x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$187) \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$188) \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \log^2 x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

et les intégrales des fonctions hyperboliques sont, d'après les propriétés des fonctions hyperboliques, les mêmes que les intégrales des fonctions circulaires.

Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies. Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies.

$$189) \int_0^1 \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$190) \int_0^1 x \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$191) \int_0^1 x \log^2 x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

(Les séries et les intégrales des fonctions hyperboliques sont les mêmes que les séries et les intégrales des fonctions circulaires.)

$$192) \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$193) \int_0^1 \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$194) \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \log x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

$$195) \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \log^2 x \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 6 + \dots$$

Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies. Les fonctions hyperboliques peuvent être définies par les séries convergentes ou par les intégrales définies.

Les courbes particulières qui se trouvent dans le plan des courbes sont les courbes de la famille.

Si nous avons $x, y, z, \dots$ et que nous cherchions à trouver une courbe qui passe par les points $x_1, y_1, z_1, \dots$ et $x_2, y_2, z_2, \dots$ et qui satisfasse à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$, nous aurons une courbe qui satisfait à la condition.

Les courbes de la famille

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$f(x, y, z, \dots) = 0$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

Les courbes de la famille

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx &= \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 + y^3 + z^3) \\ &= \frac{1}{3} (1 + y^3 + z^3) \end{aligned}$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

Les courbes de la famille $f(x, y, z, \dots) = 0$ sont les courbes qui satisfont à la condition $f(x, y, z, \dots) = 0$ et qui sont les courbes de la famille.

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx = \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx$$

Lineare der Schenkel poliert, geraden $g = p^{\frac{1}{2}}$ $g = p^{\frac{1}{2}}$ durch mit einem

$$\leq \frac{(1+\epsilon)^2}{\delta^2} \cdot \frac{5\epsilon \cdot \epsilon^{1/2}}{\epsilon^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

mitte für alle j mit a_j verschwindende Ableitungen: $\dots, f, f', f'', \dots, f^{(j-1)}$

Pinus attenuata

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

[Ligam. para o lado da garganta e o outro para o lado da garganta, e o outro para o lado da garganta]

$$= \frac{1}{n} \frac{450}{n}$$

$$d_0 \int_0^1 d_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{8} \ln^2 2$$

$$= \ln^2(2) = \frac{1}{8} \ln^2(2) = \frac{1}{8} \ln^2(2)$$

$$b) \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \varphi_x^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx - \int_0^{\infty} 1 dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{4}$$

[illegible]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 \int_0^{\infty} \frac{u^2}{v} \frac{dv}{v} &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1^2 \mathcal{V}^2 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2 \mathcal{V}^2 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \mathcal{V}^2 - \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) \mathcal{V}^2 = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2) \mathcal{V}^2 = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2) \mathcal{V}^2 \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2) \mathcal{V}^2 = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2) \mathcal{V}^2 \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2) \mathcal{V}^2 = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2) \mathcal{V}^2 \end{aligned}$$

$$b) \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} \right)' dx = - \frac{1}{x} \Big|_0^1 = - \frac{1}{1} - \lim_{x \rightarrow 0} \left(- \frac{1}{x} \right) = -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -1 + \infty = \infty$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Let } \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx &= \frac{dy}{y} = \ln y + C = \ln |f(x)|^2 + C \\ \therefore \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx &= 2 \ln |f(x)| + C = 2 \ln |x^2 + 1| + C \end{aligned}$$

[illegible]

Exhibe a = $\frac{\pi}{2}$ se por magistrala finit de

[illegible]

$$\int_0^{\infty} dx \, x^{\alpha} \ln x \, \delta(x - a) = -\frac{1}{a^{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} + 1 \right) \ln a$$

from polar bodies within follicles, and $2n = 20$ and $n = 10$ respectively.

Quelques balcons en sont aussi formés de 12 ou 14 poutres $\frac{1}{2}$ - 2

$$63) \quad a_{n,p,q} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^p \frac{a_k b_l p! q!}{(n+k+l)!} \quad a_{p,q} = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \frac{a_k b_l p! q!}{(p+k+l)!}$$

$$64) \quad a_{n,p,q} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^p \frac{a_k b_l p! q!}{(n+k+l)!} \quad a_{p,q} = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \frac{a_k b_l p! q!}{(p+k+l)!}$$

[Remarque: si, les parties de la suite, etc. = 0 et -a] Remarque: si a = 0, on a la suite (1, 0, 0, ...)

Langues, langues

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots$$

Remarque: si, les parties de la suite, etc. = 0, on a la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...)

$$2. \quad a_{n,p,q} = a_{n,p,q} \\ a_{n,p,q} = a_{n,p,q} \\ a_{n,p,q} = a_{n,p,q} \\ a_{n,p,q} = a_{n,p,q}$$

fonction $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ fonction de la forme suivante:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

note: si, on a la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...)

Remarque: si, on a la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Remarque: si, on a la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...)

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots \quad (a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots)$$

Remarque: si, on a la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...)

Remarque: si, on a la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...) et la suite (1, 0, 0, ...) est la suite (1, 0, 0, ...)

II

$$\log A = \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \quad ; \quad x = e^{-\frac{1}{2n}}$$

$$0 < x < \frac{1}{2n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \log A &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log A &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

$$2) \quad x = \frac{1}{2n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \log A &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

$$3) \quad x = \frac{1}{2n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \log A &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{1-x} \right) + 2 \log \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

$$= A_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q} + 1 \right) (-1)^n \frac{p^n}{q^{n+1}} = 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q} + 1 \right) (-1)^n \frac{p^n}{q^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{q^{n+1}} + (-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n+1}}{q^{n+2}} \left(\left(\frac{p}{q} + 1 \right) \cdot (-1)^n \frac{p^n}{q^{n+1}} \right)$$

$$2) x = \frac{p}{q} x, \text{ in } \text{Zugzwang}, \text{ in } \text{Zugzwang}, x = 1 + \frac{p}{q}$$

$$\log \frac{p}{q} = \log \frac{p+q}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{p^n}{q^{n+1}} \cdot \frac{p^{k-1}}{q^{k-1}}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p/q}^1 \frac{p^n}{x^{n+1}} \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{p^{n+k-1}}{q^{n+k-1}} \left(\frac{p}{q} \right)^{n+k-1} \frac{1}{q^{n+k-1}}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p/q}^1 \frac{p^n}{x^{n+1}} \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\frac{p}{q} \right)^{n+k-1} \frac{1}{q^{n+k-1}}$$

$$1) x = \frac{p}{q} x, \text{ in } \text{Zugzwang}$$

$$2) x = \frac{p}{q} x, \text{ in } \text{Zugzwang}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\frac{p}{q} \right)^{n+k-1} \frac{1}{q^{n+k-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \left(\left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right) \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \left(\left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right) \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \left(\left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right) \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1}, \text{ in } \text{Zugzwang}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1}$$

$$3) x = \frac{p}{q} x, \text{ in } \text{Zugzwang}$$

$$\log \frac{p}{q} = \log \frac{p+q}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{p^n}{q^{n+1}} \cdot \frac{p^{k-1}}{q^{k-1}}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p/q}^1 \frac{p^n}{x^{n+1}} \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\frac{p}{q} \right)^{n+k-1} \frac{1}{q^{n+k-1}}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{p}{q}) \frac{1}{n} \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1}, \text{ in } \text{Zugzwang}$$