Calculs sur des modules finis 1

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

4 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreCalculs sur des modules finis 1
Date1893-1897
Sujet

- congruences
- modules
- modules finis
- théorie des nombres

CoteCod. Ms. Dedekind X 9, p. 15-16
Format1 f. ; 4 p.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionCalculs sur des modules finis.
Congruences, théorie des nombres.

Théorème page 16v : Soit un module dont la base a un élément
$[\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_m+\beta_m]= \mathbf{o}=\sum[\alpha_i+\beta_i]=[\mathbf{w}]$,
et soit
$\mathbf{a} =\sum [\alpha_i]$,
$\mathbf{b}=\sum [\beta_i]$,
$\mathbf{c}\ \mathbf{w}=\sum [\alpha_i\beta_{i'}-\alpha_{i'}\beta_i]$,
alors on peut trouver 2 modules dont la base a un élément, [α], [β] tels que
$\mathbf{a}=[\alpha]+\mathbf{c}$
$\mathbf{b}=[\beta]+\mathbf{c}$

Preuve interrompue.

Le théorème suit-il des calculs ?
NotesÉcrit au dos d'une invitation pour un concert, le 25 février 1893. Borne inférieure pour la datation.

Mode(s) d'écritureCalculs phase 2
Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Relations

Collection Cod. Ms. Dedekind X 9

Ce document a les mêmes calculs que :

Calculs sur des modules finis 2

Afficher la visualisation des relations de la notice.

Mots-clefs

congruences, modules, modules finis, théorie des nombres
Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 02/10/2018 Dernière modification le 17/09/2020

Braunschweig, den 19. Febr. 1893.

Es beehrt sich der Chorgesang-Verein, Sie

zu dem am 25. Febr.

im Saalbau

stattfindenden

15

Concerte

ergebenst einzuladen.

Hochachtungsvoll

Der Vorstand des Chorgesang-Vereins.

A. N.

W. Beese.

$\alpha_\tau = a_\tau \omega + \beta_\tau \quad ; \quad [a_1, a_2 \dots a_w] = \sum [a_\tau] = a$

$\sum a_\tau b_\tau = a$
$\sum b_\tau \beta_\tau = \omega'$

$$\sum [\alpha_\tau] = \sum [a_\tau \omega + \beta_\tau] = \sum [a_\tau \omega + \beta_\tau] + [a\omega + \omega']$$

$$a_\tau \omega + \beta_\tau - \frac{a_\tau}{a}(a\omega + \omega')$$

$$= \beta_\tau \sum \frac{a_\iota}{a} b_\iota - \frac{a_\tau}{a} \sum b_\iota \beta_\iota$$

$$= \frac{1}{a} \sum (a_\iota \beta_\tau - a_\tau \beta_\iota) b_\iota = \beta \frac{1}{a} \beta'_\tau = \beta_\tau - \frac{a_\tau}{a} \omega'$$

$$\beta'_\tau = a_\tau \beta_\tau - a_\tau \omega' \qquad a_\tau \beta'_\sigma - a_\sigma \beta'_\tau = a (a_\tau \beta_\sigma - a_\sigma \beta_\tau)$$
$$\beta'_\sigma = a_\tau \beta_\sigma - a_\sigma \omega' \qquad \frac{a_\tau}{a} \beta'_\sigma - \frac{a_\sigma}{a} \beta'_\tau = a_\tau \beta_\sigma - a_\sigma \beta_\tau$$

$\sum [\beta'_\iota] = \sum [a_\iota \beta_{\iota'} - a_{\iota'} \beta_\iota]$, weil $\frac{a_\iota}{a}$ und b_ι ganz

Also

$$\sum [\alpha_\iota] = [a\omega + \omega'] + \frac{1}{a} \sum [a_\iota \beta_{\iota'} - a_{\iota'} \beta_\iota]$$

$a = \sum [\alpha_\iota] \quad ; \quad \alpha_\tau = a_\tau \omega + \beta_\tau$

$\sum [a_\iota] = a \quad ; \quad \sum [a_\iota \beta_{\iota'} - a_{\iota'} \beta_\iota] = b = \sum [\beta'_\iota]$

so ist

$$\alpha = [a\omega + \omega'] + \frac{1}{a} b \quad ; \quad a_\tau \omega' \equiv a \beta_\tau \pmod{b}$$
$$\frac{a_\tau}{a} \omega' \equiv \beta_\tau \pmod{\frac{1}{a} b}$$

$$a_\tau = \frac{\alpha_\tau - \beta_\tau}{\alpha}$$

$$a_\tau \beta_\sigma - a_\sigma \beta_\tau = \frac{(\alpha_\tau - \beta_\tau)\beta_\sigma - (\alpha_\sigma - \beta_\sigma)\beta_\tau}{\alpha} = \frac{\alpha_\tau \beta_\sigma - \alpha_\sigma \beta_\tau}{\alpha}$$

$\alpha a b' = \sum [\alpha_\tau \beta_\sigma - \alpha_\sigma \beta_\tau] = b' \sum [\alpha_\iota - \beta_\iota]$

$\alpha_\tau = a'_\tau \omega_1 + \alpha'_\tau$; $\alpha'_\tau = a''_\tau \omega_2 + \alpha''_\tau$ $\tau = 1, 2 \dots m$ u.s.w.

$\alpha = \sum [\alpha_\tau]$; alle $a'_\tau, a''_\tau \dots$ rationale Zahlen

$a' = \sum [a'_\tau]$ m Mal verschieden

$\sum^{\tau,s} [a'_\tau \alpha'_s - a'_s \alpha'_\tau] = a' \alpha_1$

so gibt es (mod. $\dot{a}_1$) eine und nur eine Klasse von Zahlen ϱ_1, welche der Congruenz

$$a'_\tau \varrho_1 \equiv a' \alpha'_\tau \pmod{a' a_1}$$

d.h. $\frac{a'_\tau}{a'} \varrho_1 \equiv \alpha'_\tau \pmod{a_1}$

genügt, und wenn man irgend eine solche Zahl ϱ_1 gewählt hat, und

$$\alpha'_\tau - \frac{a'_\tau}{a'} \varrho_1 = \alpha'_\tau - \frac{a'_\tau}{a'} \varrho_1 + a_1$$

setzt, so ist

$$\alpha = [a' \omega_1 + \varrho_1] + \alpha_1 \text{ und } \alpha_1 = \sum [\alpha'_\tau - \frac{a'_\tau}{a'} \varrho_1]$$

Nun sei wieder $\alpha = \sum [\alpha_\tau]$

$\alpha_\tau = a_\tau \alpha + \beta_\tau$; $a_\tau = a_1, a_2 \dots a_m$ rationale Zahlen, die nicht alle verschwinden

$$[a] = \sum^{\tau} [a_\tau] \; ; \; a b' = \sum^{\tau,s} [a_\tau \beta_s - a_s \beta_\tau] = \sum [a_\tau \alpha_s - a_s \alpha_\tau]$$

so ist

$$\alpha = [a\alpha + \alpha'] + b' \,, \qquad a\alpha + \alpha' = \lambda$$

$$\alpha' = \lambda - a\alpha$$

wo α' durch die Congruenzen

$$\frac{a_\tau}{a} \alpha' \equiv \beta_\tau \pmod{b'} \qquad \frac{a_\tau}{a} \lambda - a_\tau \alpha \equiv \beta_\tau$$

bestimmt wird, und zugleich ist

$$\frac{a_\tau}{a} \lambda \equiv \alpha_\tau \pmod{b'}$$

$$b' = \sum^{\tau} [\beta_\tau - \frac{a_\tau}{a} \alpha'] \qquad \alpha = [\lambda] + b'$$

$$= \sum^{\tau} [\alpha_\tau - \frac{a_\tau}{a} \lambda]$$

$a_\tau \beta_s - a_s \beta_\tau = a_\tau (\alpha_s - a_s \alpha) - a_s (\alpha_\tau - a_\tau \alpha) = a_\tau \alpha_s - a_s \alpha_\tau$

Folglich

$$b = \sum^{\tau} [\beta_\tau] = [\mu] + b'$$

b' Mal enthalten wir α und b, also $\alpha - b$

Satz: Ist

$[\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2 \dots \alpha_m+\beta_m] = \sigma = \sum [\alpha_i+\beta_i] = [\omega]$

ein eingliedriger Modul,

$a = \sum [\alpha_i]$, $b = \sum [\beta_i]$, $\tau\omega = \sum [\alpha_i\beta_{i'} - \alpha_{i'}\beta_i]$,

so kann man zwei eingliedrige Moduln $[\alpha]$, $[\beta]$ so wählen, dass

$$\left\{ \begin{array}{l} a = [\alpha] + \tau \\ b = [\beta] + \tau \end{array} \right\}$$

wird.

Beweis: $\alpha_\nu + \beta_{\nu'} = c_{\nu\nu'}\omega$; $\sum [c_{\nu\nu'}] = [1]$

$\sum c_{\nu\nu'} c'_{\nu\nu'} = 1$; $\sum [c'_{\nu\nu'}] = [1]$