Sur le dualisme dans la théorie des modules

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

48 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreSur le dualisme dans la théorie des modules
Date1895-1897
Sujet

- divisibilité
- Dualgruppen
- dualisme
- dualité
- modules
- Modulgruppen
- notation générale

CoteCod. Ms. Dedekind XI 1, p. 1-24
Format24 f. ; 48 p.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionTexte entièrement rédigé, initialement tiré "Sur le dualisme dans la théorie des modules", corrigé plus tard pour être titré "Sur les Dualgruppen".
Transcription à venir.
Mode(s) d'écritureTexte rédigé
Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Relations

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-2

Ce document est une version préliminaire de :

Première rédaction de l'article de 1900

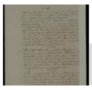
Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1

Ce document est à lire avec :

Quelques théorèmes sur les Modul-Gruppen.

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1

Ce document utilise la même notation que :



[Étude d'un groupe] de type module

Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1

Exemple le plus simple d'un système S qui n'est pas modulaire *est à lire avec ce document*

Afficher la visualisation des relations de la notice.

Mots-clefs

divisibilité, Dualgruppen, dualisme, dualite, modules, Modulgruppen, notation-generale

Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 25/10/2018 Dernière modification le 17/09/2020 ε'. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es ein (und nach ζ'. auch nur ein einziges) Element m von der Art, daß das System mφ' der Durchschnitt von aφ', bφ' ist. — ~~Dieses Element m ist identisch mit dem in ζ. definirten Element m besitzt und der~~ In der That, das in ζ. definirte Element m besitzt diese Eigenschaft; denn weil die Systeme aφ', bφ' Theile von mφ' sind, so sind die Elemente a, b auch in mφ' enthalten, also ist m ~~d. h. m ist~~ gemeinsames Element von aφ', bφ', woraus zufolge (31) nach δ'. folgt, daß mφ' gemeinsamer Theil der Systeme aφ', bφ', mithin auch Theil von deren Durchschnitt ist; bedeutet ferner n irgend ein Element dieses Durchschnittes, also ein gemeinsames Element von aφ', bφ', so sind a, b nach (31) Elemente von nφ', also aφ', bφ' (nach δ'.) Theile von nφ', woraus nach ζ. folgt, daß mφ' Theil von nφ', also m nach β. Element von nφ', mithin n nach (31) Element von mφ' ist, w. z. b. w.

ζ'. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es immer Elemente c von der Art, daß aφ', bφ' Theile von cφ' bilden, und unter diesen Elementen c befindet sich ein einziges d von der Art, daß dφ' ein Theil von jedem solchen System cφ' bildet. — In der That, das in ε. definirte Element d besitzt diese Eigenschaft; denn d ist nach β. in dem Durchschnitte dφ' ~~der Systeme~~ von aφ', bφ' enthalten, also Element von jedem dieser beiden Systeme, mithin sind a, b nach (31) ~~d. h. a, b sind~~ Elemente von dφ', woraus nach δ'. folgt, daß aφ', bφ' Theile von dφ'

so zusammen, daß das gemeinsame Feld der durch x und y bezeichneten Zeile und Spalte die Verbindung $x\psi y$ oder $x\varphi y$ liefert, je nachdem dieses Feld der linken unteren oder der rechten oberen Hälfte angehört, während die leeren Diagonalfelder durch $x\psi x = x\varphi x = x$ ausgefüllt werden können.

Umgekehrt, nimmt man ein System S von fünf beliebigen, aber verschiedenen Elementen (35) und definirt für dasselbe die Operationen φ, ψ durch die vorstehende Tabelle, sowie durch die Gesetze (1), (1'), (4), (4') in §. 1, so ergiebt die im Einzelnen durchzuführende Prüfung, auf welche wir später zurückkommen werden, daß hierdurch auch die Gesetze (2), (2'), (3), (3') in §. 1 erfüllt sind. 17

Definirt man ferner die Zeichen > und < wie in §. 2, so ergiebt sich aus dieser Tabelle in der That, daß $m > d$, $m\varphi(a\psi d) = m\varphi m' = m$, $(m\varphi a)\psi d = d'\psi d = d$, also wirklich $m\varphi(a\psi d)$ verschieden von $(m\varphi a)\psi d$ ist, während selbstverständlich der Satz (16) sich als richtig bewährt.

§. 4.

Die beiden Operationen φ und ψ in einem Systeme S sind offenbar vollständig definirt, wenn für je zwei ~~verschiedene~~ Elemente a, b in S die Verbindungen $a\varphi b$, $a\psi b$ gegeben sind; nehmen wir an, daß hierbei durch die Symmetrie-Gesetze (1), (1') und auch die Gesetze (4), (4') erfüllt sind, so kann man diese Bestimmungen in einer (endlichen oder unendlichen) Tabelle von derselben Form darstellen, wie in dem Beispiele am Schlusse von §. 3. Sind aber die Felder dieser Tabelle will, kürlich durch Elemente des Systems S besetzt, so wird die Prüfung, ob hierdurch auch die Associations-Gesetze (2), (2') und die Gesetze (3), (3') wirklich befriedigt sind, selbst bei einem endlichen Systeme S von mäßiger Elementen-Anzahl eine mühselige Arbeit erfordern. Oder wenn man auf der Richtigkeit dieser willkürlich aufgestellten Tabelle darauf besteht, so wird die Forderung, daß die vier letztgenannten Gesetze ebenfalls gelten sollen, in der Regel die Folge haben, daß verschieden bezeichnete Elemente mit einander identisch sein müssen. Aus diesem Grunde wollen wir das System der sechs Grundgesetze in §. 1 in ein anderes, äquivalentes System umformen, dessen Prüfung (etwas) weniger mühsam zu sein scheint. Zu diesem Zwecke bilden wir für jedes Element a des Systems S das mit $a\varphi'$ zu bezeichnende System aller Theiler von a, d. h. aller Elemente d, welche der Bedingung $a\varphi d = d$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible] $a\psi d = a$ [illegible]~~ (oder $d < a$, $a\psi d = a$) genügen[x], und sprechen

x) Offenbar ist $a\varphi'$ ~~auch~~ der Inbegriff aller Elemente von der Form $d = a\varphi b$, wo b willkürlich ist.

~~Sprechen~~ die charakteristischen Eigenschaften dieser Systeme $a\varphi'$ (Theile des Systems S) so aus, daß die Operationen φ, ψ selbst nicht mehr erwähnt werden:

α. Jedem Elemente a des Systems S entspricht ein vollständig bestimmtes System $a\varphi'$, welches ein Theil von S ist.

β. Das Element a ist in $a\varphi'$ enthalten, also Element des Systems $a\varphi'$. — Dies folgt aus (4) oder (8).

γ. Aus $a\varphi' = b\varphi'$ folgt $a = b$. — Denn zufolge β ist a in $a\varphi'$, also ~~[illegible]~~ in $b\varphi'$ enthalten, d. h. $a < b$, und da ebenso sich $b < a$ ergiebt, so folgt $a = b$ nach dem Satze III in §. 2.

δ. Ist d Element von $a\varphi'$, so ist $d\varphi'$ Theil von $a\varphi'$. — Denn zufolge der Annahme ist $d < a$, und da jedes ~~Element~~ in $d\varphi'$ enthaltene Element $e \leqq d$ ist, so folgt $e < a$ nach Satz IV in §. 2, d. h. e ist auch Element von $a\varphi'$; w. z. b. w. 16

ε. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es ein (und nach γ. auch nur ein einziges) Element d von der Art, daß das System $d\varphi'$ der Durchschnitt ~~[illegible]~~ von $a\varphi'$ und $b\varphi'$, d. h. der Inbegriff aller diesen beiden Systemen gemeinsamen Elemente ist. — Denn setzt man $d = a\varphi b$, so folgt aus (7), daß $d < a$, $d < b$, also d gemeinsames Element von $a\varphi'$ und $b\varphi'$, mithin nach δ., daß $d\varphi'$ gemeinsamer Theil von $a\varphi'$, $b\varphi'$ ist; umgekehrt, wenn e ein gemeinsames Element von $a\varphi'$, $b\varphi'$, also $e < a$, $e < b$ ist, so ist nach (14) auch $e < d$, also e Element von $d\varphi'$, w. z. b. w.

ζ. Sind a, b beliebige Elemente, so giebt es immer Elemente n von der Art, daß $a\varphi'$ und $b\varphi'$ Theile von $n\varphi'$ bilden, und unter diesen Elementen n befindet sich ein einziges m von der Art, daß ~~jedes solche System $n\varphi'$ einen Theil von $m\varphi'$ bildet~~ [$m\varphi'$ einen Theil von jedem solchen Systeme $n\varphi'$ bildet.] — Denn setzt man $m = a\psi b$, so folgt aus (7'), daß $a < m$, $b < m$, also a, b Elemente von $m\varphi'$, mithin $a\varphi'$, $b\varphi'$ nach δ. Theile von $m\varphi'$ ~~Wolls~~ bilden; ist ferner n irgend ein Element von derselben Beschaffenheit, sind also $a\varphi'$, $b\varphi'$ Theile von $n\varphi'$, so sind a, b zufolge β. auch Elemente von $n\varphi'$, mithin ist $a < n$, $b < n$, woraus nach (14') folgt, daß $m < n$, also m Element von $n\varphi'$, mithin nach δ. auch $m\varphi'$ Theil von $n\varphi'$ ist, w. z. b. w. — 17

Nachdem wir aus den sechs Grundgesetzen in §. 1, denen die Operationen φ, ψ innerhalb des Systems S gehorchen, die Existenz von Systemen $a\varphi'$ abgeleitet haben, für welche die sechs Gesetze $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gelten, legen wir umgekehrt diese letzteren Gesetze, in welchen die Operationen φ, ψ nirgends erwähnt werden, unserer weiteren Betrachtung zu Grunde, um daraus rückwärts wieder diese Operationen φ, ψ zu definiren. Zunächst wollen wir zeigen, daß man auf Grund ~~des~~ dieser Gesetze $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ den darin auftretenden Systemen $a\varphi'$ immer eine dualistisch ent-~~sprechende~~ zweite Klasse von Systemen $a\psi'$ gegenüberstellen kann, welche genau denselben Gesetzen gehorchen. Ist d ein beliebiges Element, so giebt es zufolge β. immer mindestens ein Element m, welches die Eigenschaft

besitzt, daß a in dem System $m\varphi'$ enthalten ist, und wir wollen das System $a\varphi'$ als den Inbegriff aller dieser Elemente m erklären; die beiden Aussagen

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ ist Element von } m\varphi' \\ m \text{ ist Element von } a\varphi' \end{array}\right\} \qquad (31)$$

sind daher vollkommen gleichbedeutend. Aus dieser Definition fließen die folgenden sechs Gesetze:

α'. Jedem Elemente a des Systems S entspricht ein vollständig bestimmtes System $a\varphi'$, welches ein Theil von S ist.

β'. Das Element a ist in $a\varphi'$ enthalten, also Element des Systems $a\varphi'$. – Dies folgt aus β. und (31).

γ'. Aus $a\varphi' = b\varphi'$ folgt $a = b$. – Denn zufolge β' ist a Element von $b\varphi'$, ebenso b Element von $a\varphi'$, ~~also~~ zufolge (31) ist b Element von $a\varphi'$, ebenso a Element von $b\varphi'$; hieraus folgt nach δ., daß jedes der beiden Systeme $a\varphi'$, $b\varphi'$ ein Theil des andern, also $a\varphi' = b\varphi'$ ist, woraus nach γ. sich $a = b$ ergiebt, w. z. b. w.

δ'. Ist m Element von $a\varphi'$, so ist $m\varphi'$ Theil von $a\varphi'$. – Denn nach (31) ist a Element von $m\varphi'$, woraus nach δ. folgt, daß $a\varphi'$ Theil von $m\varphi'$ ist; bedeutet ferner n irgend ein Element von $m\varphi'$, so ergiebt sich durch dieselben Schlüsse, daß $m\varphi'$ Theil von $n\varphi'$, also auch $a\varphi'$ Theil von $n\varphi'$ ist; zufolge β. ist daher a Element von $n\varphi'$, also zufolge (31) auch n Element von $a\varphi'$, w. z. b. w.

$$\left.\begin{array}{ll} a\psi m' = m' , & a\varphi m' = a \\ d\psi m' = m' , & d\varphi m' = d \\ a\psi d' = a , & a\varphi d' = d' \\ m\psi d' = m , & m\varphi d' = d' \\ m'\psi d' = m' , & m'\varphi d' = d' \end{array}\right\} \quad (28)$$

Verbindet man jetzt ~~fehlend~~ endlich unsere Prämissen

$$m > d\,,\quad m\psi d = m\,,\quad m\varphi d = d\,, \qquad (29)$$

~~so erhält man die letzten noch fehlenden Verknüpfungen~~

~~$m\psi a = (m\psi d)\psi a =$~~

mit (22), (27) und mit (23), (26), so erhält man vermöge der Associationsgesetze (2') und (2) die letzten noch fehlenden Verbindungen

$$\left.\begin{array}{l} m\psi a = (m\psi d)\psi a = m\psi(d\psi a) = m\psi m' = m' \\ a\varphi d = a\varphi(m\varphi d) = (a\varphi m)\varphi d = d'\varphi d = d' \end{array}\right\} \quad (30)$$

Die in (22), (23), (26), (27), (28), (29), (30) enthaltenen zwanzig Verknüpfungen von je zwei verschiedenen Elementen x, y unseres aus den fünf Elementen (25) bestehenden Systems S stellen wir in der Tabelle

	a	m	d	m'	d'
a		d'	d'	a	d'
m	m'		d	m	d'
d	m'	m		d	d'
m'	m'	m'	m'		d'
d'	a	m	d	m'	

bilden; ist ferner c irgend ein Element von der Art, daß aψ', bψ' Theile von cψ' bilden, so sind die Elemente a, b, weil sie nach β'. resp. in aψ', bψ' enthalten sind, auch Elemente von cψ', ~~d.h. c ist~~ also ist c nach (31) gemeinsames Element der Systeme aφ', bφ', also auch Element von deren Durchschnitt dφ', mithin ~~umgekehrt~~ d Element von cψ', woraus nach δ'. folgt, daß nach (31) dψ' Theil von cψ' ist, w. z. b. w. —

Da diese aus den Gesetzen α, β, γ, δ, ε, ζ abgeleiteten Gesetze α', β', γ', δ', ε', ζ' sich von jenen wesentlich nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle des Zeichens φ' das Zeichen ψ' getreten ist, so leuchtet ein, daß umgekehrt die ersteren auf dieselbe Weise aus den letzteren entspringen, wenn man bedenkt, daß zufolge (31) das System mφ' umgekehrt der Inbegriff aller derjenigen Elemente d ist, welche die Eigenschaft besitzen, daß m in dψ' enthalten ist. — 20

~~abgeleitet werden, indem man auf die jetzt gegebene aufzufassenden Klasse von Systemen aψ' eine Klasse von Systemen aφ' bildet und die letzteren so definirt, daß d stets und nur dann als Element in das System mφ' aufgenommen wird, wenn m Element des Systems dψ' ist; und da diese Definition der Systeme aφ' aus den Systemen aψ' nicht nur in der äußeren Form, sondern auch nach dem Wesen der dabei entscheidenden Merkmale vollständig mit unserer früheren Definition der Systeme aψ' aus den Systemen aφ' vollständig übereinstimmt, so sind die jetzt aus den Systemen aψ' abgeleiteten Systeme aφ' durchaus identisch mit denjenigen Systemen aφ', aus welchen wir die Systeme aψ' abgeleitet haben. Jede dieser beiden Klassen ist durch die andere vollständig bestimmt.~~

Nehmen wir jetzt an, es sei ein System S von Elementen $a, b \ldots$ gegeben, in welchem die Gesetze $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ (und folglich auch die Gesetze $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \zeta'$) gelten, ~~so wollen wir zeigen, daß für dasselbe System S ein Paar [illegible] und auch nur~~ so lässt sich, wie wir umgekehrt zeigen wollen, ein und auch nur ein einziges Operationen-Paar φ, ψ definiren, welches den sechs Grundgesetzen in §. 1 genügt, und aus welchem in der oben angegebenen Weise wieder die jetzt als gegeben anzusehenden Systeme $a\varphi'$ (und $a\psi'$) entspringen. In der That, wenn es ein solches Paar φ, ψ giebt, so ~~müssen~~ folgt aus den obigen Beweisen von ε, ζ mit Rücksicht auf γ, daß allgemein $a\varphi b$, $a\psi b$ resp. mit denjenigen Elementen d, m identisch sein müssen, ~~[illegible]~~ deren ~~Existenz~~ Dasein in den Gesetzen ε (oder ζ'), ζ (oder ε') ausgesprochen wird; es kann daher ~~höchstens~~ nur ein einziges solches Paar φ, ψ geben, und ~~[illegible]~~ dasselbe muß so definirt werden, daß, wenn $a\varphi b = d$, $a\psi b = m$ gesetzt wird, $d\varphi'$ den Durchschnitt von $a\varphi'$, $b\varphi'$, ebenso $m\psi'$ den Durchschnitt von $a\psi'$, $b\psi'$ bildet. Aus dieser Definition von φ, ψ ergiebt sich alles Übrige leicht. Da nämlich der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ zweier beliebigen Systeme A, B auch der von B, A, und da ferner, wenn E den Durchschnitt der Systeme B, C bedeutet, der Durchschnitt von $\mathfrak{D}$, C zugleich der von A, E,

nämlich der Durchschnitt aller drei Systeme A, B, C ist, so folgt mit Rücksicht auf γ und γ', daß die so definirten Operationen φ, ψ den Symmetrie- und Associations-Gesetzen (1), (1'), (2), (2') genügen. Da ferner, wenn wieder $a\varphi b = d$ gesetzt wird, $d\varphi'$ als Durchschnitt von $a\varphi'$, $b\varphi'$ jedenfalls Theil von $a\varphi'$, also d zufolge β auch Element von $a\varphi'$, mithin a nach (31) Element von $d\psi'$, also $a\psi'$ nach δ' Theil von $d\psi'$ und folglich auch der Durchschnitt der beiden Systeme $a\psi'$, $d\psi'$ ist, so ergiebt sich aus der obigen Definition der Operation ψ, daß $a\psi d = a$ ist, worin das Gesetz (3) besteht; und auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich offenbar das letzte Gesetz (3'). 22

Endlich folgt aus ~~ergiebt sich~~ / ~~daß zufolge~~ der Definition von φ, daß das System $a\varphi'$ wirklich der Inbegriff aller derjenigen Elemente d ist, welche der Bedingung $a\varphi d = d$ genügen; denn wenn $a\varphi d = d$, so ist $d\varphi'$ als Durchschnitt der Systeme $a\varphi'$, $d\varphi'$ jedenfalls Theil von $a\varphi'$, also d zufolge β Element von $a\varphi'$; und umgekehrt, wenn d irgend ein Element von $a\varphi'$ bedeutet, so ist $d\varphi'$ zufolge δ' Theil von $a\varphi'$, also auch der Durchschnitt der Systeme $a\varphi'$, $d\varphi'$, mithin zufolge der Definition von φ auch $a\varphi d = d$, w. z. b. w. Und ebenso leuchtet ein, was ohnehin schon hierin enthalten ist, daß $a\psi'$ der Inbegriff aller derjenigen Elemente m ist, welche der Bedingung $a\psi m = m$ (oder $m > a$, $a\varphi m = a$) genügen. —

Nachdem unser Kreislauf von den Operationen φ, ψ zu den Systemen $a\varphi'$, $a\psi'$ und von diesen zurück zu jenen hiermit geschlossen ist, leuchtet ein, daß die Prüfung, ob die durch eine Tabelle von der oben beschriebenen Art ~~definirten Operationen φ, ψ~~ und durch die Gesetze (1), (1'), (4), (4') definirten Operationen φ, ψ auch den Gesetzen (2), (2'), (3), (3') gehorchen, darauf zurückkommt, die Systeme $a\varphi'$ zu bilden und nachzusehen, ob die fünf Gesetze β, γ, δ, ε, ζ durchweg erfüllt sind. Da zur Bildung der Systeme $a\varphi'$ schon diejenige Hälfte der Tabelle ausreicht, in welcher die Verbindungen $a\varphi b$ enthalten sind, so ergiebt sich hieraus zugleich das Resultat, daß die andere ~~Hälfte einer richtigen Tabelle~~, die Verbindungen $a\psi b$ enthaltende Hälfte einer richtigen Tabelle schon aus der ersteren folgen muß, daß also die Operation ψ durch die Operation φ vollständig bestimmt ist. 23

Dies läßt sich natürlich auch unmittelbar aus den Grundgesetzen in §. 1 beweisen. Nehmen wir an, die Operation χ gehorche für sich allein und auch in Verbindung mit φ denselben Gesetzen, wie die Operation ψ, so ~~folgt~~ ergiebt sich daraus die Identität von ψ und χ. In der That, setzt man zur Abkürzung

$$a\psi b = m\,, \quad a\chi b = n\,,$$

und ersetzt ψ in (3') durch χ, so folgt

$$a\varphi n = a\,, \quad b\varphi n = b$$

und hieraus nach (3), (2'), (3') successive

$$a\psi n = n\,,\quad b\psi n = n$$

$$m\psi n = (a\varphi b)\psi n = a\psi(b\psi n) = a\psi n = n$$

$$\cancel{\text{also}}\quad m\varphi n = m\varphi(m\psi n) = m\,,$$

und da man auf dieselbe Weise, wenn ψ, χ überall mit einander vertauscht werden, ~~auch~~ gezeigt $m\varphi n = n$ erhält, so ergiebt sich $m = n$, also immer $a\varphi b = a\chi b$, w. z. b. w.

Was nun die Prüfung betrifft, ob die Systeme $a\varphi'$ den Gesetzen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gehorchen, so wird dieselbe, wie mir scheint, wohl allgemein weniger beschwerlich sein, als die unmittelbare Verification der Grundgesetze in §. 1. Nehmen wir als Beispiel das am Schlusse von §. 3 betrachtete System S der fünf verschiedenen Elemente a, m, d, m', d' in (25), so ergeben sich aus der einen oder anderen Hälfte der dortigen Tabelle die Systeme 24

$m'\varphi' = m', m, a, d, d'$	$m'\psi' = m'$
$m\varphi' = m, d, d'$	$m\psi' = m', m$
$a\varphi' = a, d'$	$a\psi' = m', a$
$d\varphi' = d, d'$	$d\psi' = m', m, d$
$d'\varphi' = d'$	$d'\psi' = m', m, a, d, d'$

IV. Ist $a > b$ und gleichzeitig $b > c$, so ist auch

$$a > c. \qquad (10)$$

Denn die beiden Annahmen bestehen in $a\varphi b = b$, $b\varphi c = c$, und hieraus folgt $a\varphi c = a\varphi(b\varphi c) = (a\varphi b)\varphi c = b\varphi c = c$, also $a > c$, w. z. b. w.

V. Sind a, b, c beliebige Elemente, so ist

$$a\psi b > a\varphi c. \qquad (11)$$

Denn zufolge (7') und (7) ist $a\psi b > a$ und gleichzeitig $a > a\varphi c$, und hieraus folgt (11) nach dem vorhergehenden Satze (10).

VI. Ist $m > d$ und $m' > d'$, so ist

$$m\varphi m' > d\varphi d' \qquad (12)$$
$$m\psi m' > d\psi d'. \qquad (12')$$

~~Dies ergiebt~~ Denn sich aus den Identitäten

$$(m\varphi m')\varphi(d\varphi d') = (m\varphi d)\varphi(m'\varphi d')$$
$$(m\psi m')\psi(d\psi d') = (m\psi d)\psi(m'\psi d'),$$

und den Annahmen ~~wenn man bedenkt, daß zufolge der~~ Annahmen

$$m\varphi d = d, \quad m'\varphi d' = d'$$
$$m\psi d = m, \quad m'\psi d' = m'$$

~~nach~~ folgt

$$(m\varphi m')\varphi(d\varphi d') = d\varphi d'$$
$$(m\psi m')\psi(d\psi d') = m\psi m',$$

was mit (12) und (12') übereinstimmt.

a, b immer zwei vollständig bestimmte, durch aφb, aψb zu bezeichnende Elemente desselben Systems S erzeugen und den folgenden ~~acht~~ sechs Gesetzen gehorchen:

$$\cancel{a\varphi a = a} \qquad \cancel{(1)}$$
$$a\varphi b = b\varphi a \qquad \cancel{(2)}\ (1)$$
$$(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c) \qquad \cancel{(3)}\ (2)$$
$$\cancel{a\psi a = a} \qquad \cancel{(1')}$$
$$a\psi b = b\psi a \qquad \cancel{(2')}\ (1')$$
$$(a\psi b)\psi c = a\psi(b\psi c) \qquad \cancel{(3')}\ (2')$$
$$a\psi(a\varphi b)\ \cancel{(a\varphi b)\psi a} = a \qquad \cancel{(4)}\ (3)$$
$$a\varphi(a\psi b)\ \cancel{(a\psi b)\varphi a} = a. \qquad \cancel{(4')}\ (3')$$

Je zwei solche, durch (α) und (α') bezeichnete Gesetze entsprechen einander dualistisch in dem Sinne, daß sie durch Vertauschung von φ und ψ in einander übergehen. Durch dualistische Umwandlung der Voraussetzungen irgend eines Satzes unserer Untersuchung ~~[illegible]~~ muß daher immer ein zweiter Satz entstehen, das dualistische Gegenstück des ersteren, welcher umgekehrt auf dieselbe Weise aus dem zweiten hervorgeht, aber auch sehr wohl mit diesem identisch sein kann.

Aus den associativen Gesetzen (2) ~~(3)~~ und (2') ~~(3')~~ ~~folgt~~ ergiebt sich bekanntlich, daß, wenn ~~bei fortgesetzter Verknüpfung~~ mehrere Elemente in endlicher Anzahl und in einer bestimmten Reihenfolge vorliegen, bei fortgesetzter Verknüpfung durch dasselbe Zeichen φ oder durch dasselbe Zeichen ψ die Klammern, wenn jedesmal das ~~die~~ ~~zur Ausführung dieser Bildung~~ bei jedem Schritte ~~der~~ zur Verbindung ausgewählte Paar

von Klammern eigentlich
~~zu erhaltender bestimmter Weg~~ angedeutet werden müsste, fortgelassen werden dürfen; und ebenso folgt aus den symmetrischen oder commutativen Gesetzen (1) und (1'), dass auch jede Vertauschung der hierbei auftretenden Elemente in ihrer ~~Aufeinander~~ Reihenfolge von links nach rechts gestattet ist. x) [

N.B.! Einzuschieben, was auf der Rückseite S. 3.a steht!

Um zu zeigen, wie verschiedenartig die Gebiete sind, auf welche unsere Untersuchung angewendet werden kann, erwähne ich außer dem Beispiele der Modul-Theorie, wo $\alpha\varphi\beta$ den größten gemeinsamen Theiler, $\alpha\psi\beta$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Moduln α, β bedeutet, noch folgende Fälle.

Sind die Elemente $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ des Systems S die sämmtlichen Gruppen, welche in einer endlichen oder unendlichen Abel'schen oder auch Galois'schen Gruppe als Divisoren (Theiler) enthalten sind, so kann man unter $\alpha\varphi\beta$ das ~~größte~~ kleinste gemeinsame ~~Vielfache~~ ~~Theiler~~, unter $\alpha\psi\beta$ das ~~kleinste~~ größte gemeinsame ~~Vielfache~~ Theiler der beiden Gruppen α, β verstehen (~~oder umgekehrt~~).

Ein ähnliches Beispiel, welches aber doch einen charakteristischen Unterschied zeigt, ist folgendes. Bedeuten die Elemente $a, b, c \ldots$ unseres Systems S alle möglichen Systeme von Dingen (darunter auch das aus keinem Elemente bestehende Nullsystem), so kann man unter $a\varphi b$ das System ~~verstehen~~ aller derjenigen ~~Elemente~~ Dinge verstehen, welche wenigstens einem der beiden Systeme

x) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 2.

D. 3. a.

Diese Folgerungen aus den vier ersten Gesetzen, welche für jede einzelne der beiden Operationen φ, ψ gelten, werde ich im Folgenden als schon bewiesen ansehen und können ohne Weiteres benutzen.

Die beiden letzten Gesetze (3) und (3') enthalten dagegen einen Zusammenhang zwischen den Operationen φ, ψ, und ihre Combination führen – auch ohne Hinzuziehung der früheren Gesetze – zu den beiden Folgerungen

$$a\varphi a = a \qquad (4)$$

$$a\psi a = a, \qquad (4')$$

wenn man das willkürliche Element ~~b~~ b in (3') durch $a\varphi b$, in (3) durch $a\psi b$ ersetzt. —

a, b angehören, und unter $a \psi b$ das System aller derjenigen Dinge, welche beiden Systemen a, b gemeinsam sind. An einem anderen Orte*) habe ich $a \varphi b$ das aus a, b <u>zusammengesetzte</u> System, $a \psi b$ die <u>Gemeinheit</u> von a, b genannt, während Herr Schröder ~~[illegible]~~ in seinem großen Werke**) dieselben Systeme mit dem Namen der <u>Summe</u> $a+b$ und des <u>Produktes</u> ab von a, b belegt.

Die drei vorhergehenden Beispiele stimmen darin überein, daß die Elemente $a, b, c \ldots$ selbst endliche oder unendliche Systeme von Dingen sind, und auch noch darin, daß $a \psi b$ immer die Gemeinheit oder das Produkt oder – was mir eine recht treffende Benennung zu sein scheint – den <u>Durchschnitt</u>***) der Systeme a, b bedeutet, während $a \varphi b$ in den beiden ersten Beispielen sich nur ausnahmsweise mit dem aus a, b zusammengesetzten System oder Produkt deckt, vielmehr im Allgemeinen noch andere Dinge enthält, die diesem Produkt nicht angehören.

Als letztes Beispiel mag das folgende dienen. Die Elemente $a, b, c \ldots$ ~~[illegible]~~ unseres Systems S seien die sämmtlichen <u>Punkte</u> des reellen Zahlenraumes von n Dimensionen, d. h. jedes Element a sei eine <u>Folge</u> von n reellen Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$, welche als erste, zweite … n^{te} <u>Koordinate</u> des Punktes a bezeichnet werden mögen; man kann dies auch so ausdrücken, daß jeder Punkt a eine <u>Abbildung</u> des Systems

*) In meiner Schrift: Was sind und was sollen die Zahlen? §. 1.
**) Vorlesungen über die Algebra der Logik. Bd. 1. §§ 5–7 und S. 253.
***) H. Weber: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1. S. 155.

der ersten n natürlichen Zahlen $1, 2 \dots n$ in Reihe der reellen Zahlen ist. Die Punkte $a\varphi b$, $a\psi b$ sollen dadurch erklärt werden, daß ~~$(a\varphi b)_r$~~ die r^{te} Coordinate $(a\varphi b)_r$ immer die algebraisch kleinste, und $(a\psi b)$ die größte der beiden ~~Zahlen~~ Coordinaten a_r, b_r ist; man überzeugt sich dann leicht, daß hierdurch unsere obigen ~~acht~~ sechs Gesetze befriedigt werden. Auch hier sind die Elemente $a, b, c \dots$ Systeme von Dingen (Zahlen), aber bei der Beurtheilung ihrer Identität oder Verschiedenheit entscheidet nicht die Gesammtheit der Coordinaten eines jeden Punktes, sondern die Art, wie dieselben den Zahlen $1, 2 \dots n$ entsprechen. 5

§. 2.

Wir wollen nun aus den sechs Grundgesetzen eine Reihe von Folgerungen ableiten.

I. Die beiden Aussagen

$$m\varphi d = d \qquad (5)$$

$$m\psi d = m \qquad (5')$$

sind gleichwerthig, d. h. jede von ihnen ist eine Folge der andern.

Gilt nämlich (5), so ergiebt sich (5') aus (3), wenn man $a = m$, $b = d$ setzt; und wenn (5') gilt, so ergiebt sich (5) aus (3'), indem man $a = d$, $b = m$ setzt.

Diese, durch (5) oder (5') dargestellte Beziehung zwischen zwei Elementen m, d tritt so häufig auf, daß es zweckmäßig ist, sie noch einfacher ~~[illegible]~~ aus-

zu deuten; hierzu wähle ich die beiden, in der Modultheorie*) von mir benutzten Bezeichnungen

zugleich mag m ein Vielfaches oder Multiplum von d, umgekehrt d ein Teiler oder Divisor von m heißen.

$$m > d \qquad (6)$$

$$d < m, \qquad (6')$$

die als vollkommen gleichbedeutend mit einander, wie (5) ~~aus~~ und (5') anzusehen sind. Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Sätze, deren dualistischer Charakter offenbar darin entspringt, daß die Vertauschung von φ, ψ immer diejenige der Zeichen $>$, $<$ nach sich zieht.

II. Sind a, b beliebige Elemente, so ist

$$a\varphi b < a \qquad (7)$$

$$a\psi b > a. \qquad (7')$$

$$a < a \qquad (8)$$

$$a > a. \qquad (8')$$

Denn (7) folgt offenbar aus (3) durch Vergleichung mit (5') und (6'), indem man $a = m$, $a\varphi b = d$ setzt, und ebenso folgt (7') aus (3') durch Vergleichung mit (5) und (6), indem man $a = d$, $a\psi b = m$ setzt. Mit Rücksicht auf (4) und (4') ergeben sich ferner die Sätze (8) und (8') aus (7) und (7'), wenn man $b = a$ setzt.

III. Ist $m > d$ und gleichzeitig $m < d$, so ist

$$m = d. \qquad (9)$$

Denn ebenso, wie die erste Annahme $m > d$ nur eine Umschreibung von $m\varphi d = d$ ist, besagt die zweite Annahme $d > m$ in $d\varphi m = m$, und hieraus folgt (9), weil $m\varphi d = d\varphi m$ ist.

---

*) Bei manchen anderen Anwendungsgebieten würde ~~also~~ die Vertauschung der beiden Zeichen $>$, $<$ der ihnen sonst beigelegten Bedeutung besser entsprechen.

Besserer Titel: Über Dualgruppen. Zu dieser Abhandlung gehört auch der Inhalt des Folio-Blattes (MG): „Einige Sätze über Modul-Gruppen".

D. 1.

Die Modul-Gruppen bilden den speciellen Fall, der durch den Satz (7) der Dirichlet'schen Zahlentheorie (Aufl. 4, S. 498) charakterisirt ist. Unter diesen erscheint wieder als specieller Fall die Ideal-Gruppen vom Charakter

$(a+b)-(a+c) = a+(b-c)$

oder

$(a-b)+(a-c) = a-(b+c)$

Über den Dualismus in der Modultheorie.

Von R. Dedekind.

§ 1.

Schon oft habe ich auf einen eigenthümlichen Dualismus aufmerksam gemacht, welcher in der Theorie der Moduln auftritt*). Derselbe wiederholt sich auf ganz anderen Forschungs-Gebieten so häufig, dass es nützlich erscheint, die allgemeinen Verknüpfungs-Gesetze, welche in jener Theorie herrschen, unabhängig von den ihr zu Grunde liegenden Voraussetzungen aufzufassen. Geschieht dies, und ersetzt man die zur Bildung des grössten gemeinsamen Theilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von zwei Moduln benutzten Zeichen $+$, $-$ durch φ, ψ, so bleibt zunächst nur die folgende Annahme übrig:

In einem endlichen oder unendlichen System S von Elementen $a, b, c \ldots$, deren Bedeutung gänzlich unbestimmt gelassen wird, giebt es zwei Verknüpfungsarten φ, ψ, welche aus je zwei gleichen oder verschiedenen Elementen

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, vierte Auflage, § 169.

VII. Ist $m > d$, und a ein beliebiges Element, so ist

$$m\varphi a > d\varphi a \qquad (13)$$

$$m\psi a > d\psi a \qquad (13')$$

Dies ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, wenn man $m' = d' = a$ setzt, was zufolge (8') erlaubt ist.

VIII. Aus $m > d$ und $m' > d$ folgt

$$m\varphi m' > d\,; \qquad (14)$$

und umgekehrt; aus $m > d$ und $m > d'$ folgt

$$m > d\psi d'. \qquad (14')$$

und umgekehrt.

Beides ergiebt sich aus dem Satze II, wenn man $d' = d$ oder $m' = m$ setzt; und ~~außerdem die Sätze 7~~ die Umkehrungen folgen aus (7), (7'), (10). ~~[illegible]~~ Offenbar kann man diese Sätze auch so aussprechen, daß jeder gemeinsame Theiler d von m und m' auch Theiler von $m\varphi m'$, und jedes gemeinsame Vielfache m von d und d' auch Vielfaches von $d\psi d'$ ist; wir wollen deshalb $a\varphi b$ den größten gemeinsamen Theiler und $a\psi b$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Elemente a, b nennen.

IX. Ist $m > d,\ m > d',\ m' > d,\ m' > d'$, so ist

$$m\varphi m' > d\psi d', \qquad (15)$$

und umgekehrt.

Dies ergiebt sich offenbar durch wiederholte Anwendung des vorhergehenden Satzes.

X. Ist $m > d$, und a ein beliebiges Element, so ist

$$m\varphi(a\psi d) > (m\varphi a)\psi d. \qquad (16)$$

Setzt man nämlich $a\psi d = m'$, $m\varphi a = d'$, so sind zufolge (7), (7'), (11) auch die drei letzten Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes erfüllt. — Daß umgekehrt aus (16) stets $m > d$ folgt, ergiebt sich ~~leicht aus (7), (7') und dem Satze IV~~ aus der Umkehrung ~~von~~ IX.

XI. Sind a, b, c drei beliebige Elemente, so ist

$$(a\varphi b)\psi(b\varphi c) < b\varphi(a\psi(b\varphi c)) \qquad (17)$$

$$(a\psi b)\varphi(b\psi c) > b\psi(a\varphi(b\psi c)). \qquad (17')$$

Beides ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze (16), ~~wenn~~ weil dessen Voraussetzung $m > d$ sowohl durch $m = b$, $d = b\varphi c$, als auch durch $m = b\psi c$, $d = b$ befriedigt wird.

Umgekehrt ergiebt sich der Satz (16) sowohl aus (17) als auch aus (17'), wenn man $\overset{\text{einmal}}{}$ $b = m$, $c = d$ ~~oder~~, sodann $b = d$, $c = m$ setzt und wieder ~~[illegible]~~ $m > d$ voraussetzt. Der Satz (16) entspricht dualistisch sich selbst.

XII. Sind a, b, c drei beliebige Elemente, so ist

$$(a\varphi b)\psi(b\varphi c) < b\varphi(a\psi c) \qquad (18)$$

$$(a\psi b)\varphi(b\psi c) > b\psi(a\varphi c). \qquad (18')$$

Denn aus (7), (13'), (13) folgt der Reihe nach

$$b\varphi c < c,\ a\psi(b\varphi c) < a\psi c,\ \boxed{b\varphi(a\psi(b\varphi c)) < b\varphi(a\psi c), \quad (19)}$$ besondere Zeile

und ebenso folgt aus (7'), (13), (13') der Reihe nach

$$b\psi c > c,\ a\varphi(b\psi c) > a\varphi c,\ \boxed{b\psi(a\varphi(b\psi c)) > b\psi(a\varphi c) \quad (19')}$$ besondere Zeile

vergleicht man dies mit (17) und (17'), so ergeben sich die Sätze (18), (18') unmittelbar aus dem Satze IV.

§. 3.

Wir wollen uns zunächst noch eingehender mit dem Satze (16) beschäftigen. In der Modultheorie (und ebenso in den drei andern Anwendungs-Gebieten, welche in §. 1 erwähnt sind) kann man beweisen, daß aus der Prämisse $m > d$ dieses Satzes auch

$$(m\varphi a)\psi d > m\varphi(a\psi d) \qquad (20)$$

folgt, woraus mit Rücksicht auf den Satz III sich

$$m\varphi(a\psi d) = (m\varphi a)\psi d \qquad (21)$$

ergiebt. Bei diesem Beweise habe ich ausdrücklich hervorgehoben x), daß hierzu die früheren Sätze, welche sämmtlich auf den in §. 1 aufgestellten sechs Grundgesetzen beruhen, durchaus nicht ausreichen, daß es vielmehr erforderlich ist, noch einmal auf den Begriff des Moduls zurückzugehen. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, wollen wir uns jetzt geradezu die Aufgabe stellen, das einfachste Beispiel eines Systems S von Elementen zu finden, in welchem die Operationen φ, ψ den sechs Grundgesetzen in §. 1 gehorchen, in welchem aber die Prämisse $m > d$ keineswegs die Folgerung (20) nach sich zieht.

x) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, vierte Auflage, §. 169. S. 499.

Lassen wir zunächst die Annahme $m > d$ gänzlich fallen, und bilden wir aus ~~den~~ drei beliebigen Elementen a, m, d des Systems S die beiden Elemente

$$m' = a \psi d \qquad (22)$$

$$d' = m \varphi a, \qquad (23)$$

so ergiebt sich leicht, daß jede einzelne der folgenden zehn Annahmen

$$\left.\begin{array}{l} d > m,\ d' > m,\ d > m',\ d' > m',\ a > m' \\ d' > a,\ m > a,\ a > d,\ m > m',\ d' > d \end{array}\right\} \qquad (24)$$

die obige Folgerung

$$d \psi d' > m \varphi m' \qquad (20)$$

nach sich ziehen würde. Für die vier ersten Annahmen (24) schließt man dies unmittelbar aus dem Satze IV, wenn man zugleich berücksichtigt, daß zufolge (γ) und (γ') immer

auch ohne Zuziehung von (22) oder (23)

$$d \psi d' > d,\ d \psi d' > d';\ m > m \varphi m',\ m' > m \varphi m'$$

ist. ~~Da ferner~~ Zufolge (22) und (γ') ist ferner $m' > a$, mit, so folgt aus der fünften Annahme $a > m'$ nach dem Satze III, daß $m' = a$, also $m \varphi m' = m \varphi a = d'$ ~~folglich wieder~~ ist, woraus wieder (20) folgt. ~~Aus (23) und (γ) folgt ergiebt sich ebenso~~ Ebenso führt die sechste Annahme $d' > a$, weil zufolge (23) und (γ) auch $a > d'$ ist, zu den Folgerungen $d' = a$, $d \psi d' = d \psi a = m'$, mithin zu (20). ~~Auch die~~ Die siebente Annahme $m > a$ kommt zufolge (23) auf die sechste $d' = a$, ebenso die achte $a > d$ zufolge (22) auf die fünfte $m' = a$ zurück. Da endlich aus (22) und (23), wie schon bemerkt, $m' > a$, $a > d'$ folgt, so kommt nach dem Satze IV die neunte Annahme $m > m'$ auf die siebente $m > a$, und die zehnte $d' > d$ auf die achte $a > d$ zurück.

Da wir aber ein System S herzustellen wünschen, in welchem die Beziehung (20) nicht gilt, so darf darin auch keine der zehn Beziehungen (24) gelten, und folglich müssen (weil immer $x > x$ ist) die fünf Elemente

$$a,\ m,\ d,\ m',\ d' \qquad (25)$$

sämmtlich von einander verschieden sein. Das denkbar einfachste Beispiel würden wir daher erhalten, wenn es sich als möglich erweisen sollte, daß S nur aus diesen fünf verschiedenen Elementen (25) bestehen könnte. Versuchen wir diese Annahme durchzuführen, so müssten die in S enthaltenen beiden Elemente $d\varphi d'$, $m\psi m'$ mit je einem der Elemente (25) übereinstimmen; da aber jede der Annahmen

$$d\varphi d' = a,\ m,\ d,\ m'$$

$$m\psi m' = a,\ m,\ d,\ d'$$

offenbar auf eine oder mehrere der verbotenen Beziehungen (24) führen würde, so bleibt uns die einzige Möglichkeit

$$d\varphi d' = d',\quad d > d',\quad d\psi d' = d \qquad (26)$$

$$m\psi m' = m',\quad m < m',\quad m\varphi m' = m \qquad (27)$$

übrig.

Durch alleinige Anwendung der Grundgesetze in D. 1 auf die Definitionen (22), (23) ergeben sich ferner die folgenden zehn Verknüpfungen

12