

Quelques théorèmes sur les Modul-Gruppen.

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

12 Fichier(s)

Contributeur·rices Haffner, Emmylou

Éditeurs Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS)
; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN
(Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

Titre Quelques théorèmes sur les Modul-Gruppen.

Date 1894-1897

Sujet

- chaînes
- divisibilité
- longueur (Länge)
- modules
- Modulgruppen
- notation2

Cote Cod. Ms. Dedekind XI 1, p. 29-34

Format 6 f. ; 12 p.

Langue Allemand

Description & Analyse

Description Définition des opérations entre modules, études des propriétés.

Certains résultats se retrouvent dans les Dualgruppen, d'autres en théorie des nombres.

NB seulement des modules.

Mode(s) d'écriture Texte rédigé

Auteur·es de la description Haffner, Emmylou

Relations

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1

Ce document utilise la même notation que :



[Meilleure présentation pour 3 modules a, b, c](#)

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-2

Ce document est une version préliminaire de :



[Première rédaction de l'article de 1900](#)

Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1

[Sur le dualisme dans la théorie des modules](#) est à lire avec ce document

[Afficher la visualisation des relations de la notice.](#)

Mots-clefs

[chaînes](#), [divisibilité](#), [longueur \(Länge\)](#), [modules](#), [Modulgruppen](#), [notation2](#)

Notice créée par [Emmylou Haffner](#) Notice créée le 25/10/2018 Dernière modification le 21/07/2021

Einige Sätze über Modul-Gruppen

Ist M (mit D z. v. hängend) gegeben
 die Gruppe von Modul-Gruppen
 (S. 169, Bemerkung auf S. 169) ist auf
 die folgenden Begriffe zurückzuführen:
 1. Ein System M von Modulen heißt
 eine Gruppe, wenn die auf D z. hängenden
 Module a, b der System M gebildet
 aus Modulen $a+b, a-b$ denselben
 System angehören. - Daraus folgt
 2. Jedes einzelne Modul a bildet für
 sich eine Gruppe, weil $a+a = a-a = a$ ist
 3. Das System M aller Module bildet eine
 Gruppe.
 4. Sind $A, B, C, \dots$ Modulgruppen, so
 bildet das System aller dazugehörigen
 Module, welche alle diesen Gruppen
 gemeinschaftlich angehören, eine Gruppe,
 welche die Gemeinsamkeit von $A, B, C, \dots$
 gemein hat mit $A+B+C, \dots$ bezeichnet
 werden kann. - Aber diese Gemeinsamkeit
 kann nicht z. v. hängen, sind z. B. a, b
 zugehörige Module, so besteht
 die beiden Gruppen $(a), (b)$ kann $(a+b)$
 nicht sein. - Will man für festes a eine
 Gruppe für das auf D z. hängende Modul a ,
 setzen das System
 5. Dies ist ein System von Systemen von Mo-
 dulen $a, b, c, \dots$, so heißt es Modulgruppe
 $M(a, b, c, \dots)$, in welchen alle diese Module
 enthalten sind, die sich v. hängend (a) ,
 mindestens alle diesen Gruppen M bildet
 (auf a) eine Gruppe, die mit $(a) = (a, b, c, \dots)$
 bezeichnet werden kann (S. 169). Das
 System ist das System der Gruppe (a)
 System.
 6. Sind $A, B, C, \dots$ Gruppen, die alle a
 ist das System aller dazugehörigen Module,
 welche gemeinschaftlich einer oder mehreren dieser
 Gruppen angehören, so kann die Gruppe
 (a) auch mit $(A, B, C, \dots)$ bezeichnet werden.

Ist gegeben in die Abschnitte über die Be-
 zeichnung in der Modultheorie (S. 169, über
 "Gruppen"). - Ist $a, b, \dots$ sind $a, b, \dots$
 auf $a+b$ steht $a+b$, $a-b$ steht $a-b$.

Es ist die Gruppe (Modul) M und
 die Gruppe M betrachtet, in welchen die Gruppe
 (a) auf S. 169 in S. 169 die Gruppe a von
 dieser Gruppe M gilt.

Die alle gemeinsamen Module der Gruppe
 D sind in der Gruppe M enthalten,
 so kann D eine Gruppe von M , und
 M eine Untergruppe von D .

Größe gemeinsamer Untergruppe der Gruppe
 $A, B, C, \dots$

Größe gemeinsamer Untergruppe der
 Gruppe $A, B, C, \dots$

Das Hilferinge $\mathbb{Z}$ ist allgemein
 die folgenden Eigenschaften
 Menge M betrachtet, und alle seine
 Module sind fast alle in M enthalten,
 Module $\mathbb{Z}$ genannt.

7. Satz (S. 499). Ist a, b zwei
 Elemente a, b in M ,
 die folgende Module, welche die Bedingung
 genügen.

$a + b = a', a - b = b'$
 genügen, so findet man in den Modulen
 a, b .

7. Satz (S. 499). Ist a, b zwei
 Elemente a, b in M ,
 die folgende Module a' , welche die
 Bedingung genügen.

$a + b = a' = a$ (1)
 genügen, und die Bedingung b' ,
 welche die Bedingung genügen.

$a - b = b', b' = b$ (2)
 genügen, eine gegenseitige Eindeutigkeit
 Correspondenz stellt, welche jeder
 der beiden, gegenseitig mit einander
 folgenden Bedingungen

$b_1 = b - a'$ (3)

$a' = a + b_1$ (4)

eingetragen wird.

Bezeichnet die Bedingung b_1 durch
 b_1 und a' durch a' , so ist b_1 und a' äquivalent,
 und eingetragene Bedingung a' durch die Folge
 (S. 499), dass auch

$m > b$ (5)

gilt, dass $m + (a - b) = (m + a) - b$ (6)

ergibt (S. 499). Für die Folge, ergibt
 (1) und (6) angenommen, so folgt $a' = b_1$

$a - b_1 = b_1$, d. h. $b_1 > b$

$a - b_1 = b - a'$, d. h. $a - b > b_1$

also (5), folgt man weiter

$m = a$, $b = a'$, $m = b$

Bedingung (5) erfüllt ist, so ergibt sich
 auch (6).

$a + (b - a') = (a + b) - a'$

ist, so folgt (1) und (3) und (4) ebenfalls, und
 Bedingungen (3) und (4) angenommen,
 so folgt

folgende Bedingung

Ist $a, b, c, \dots$ irgend welche Module
 der Menge M , so soll mit $M_a, b, c, \dots$
 die Menge aller Bedingungen in M und
 folgenden Modulen a' bezeichnet werden, welche
 die Bedingungen

$a + b + c + \dots = a' = a - b - c - \dots$
 genügen. Offenbar ist

$M_a, b, c, \dots = M_{a+b+c+\dots}, a-b-c-\dots$

Also: Die Bedingungen

$a + b = a' = a$ und $b_1 = b - a'$
 sind gleichbedeutend mit den Bedingungen
 $a - b = b_1 = b$ und $a' = a + b_1$

folgende ist

$(a', a) = (b_1, a) = (b_1, a - b)$

$(b_1, b_1) = (b_1, a') = (a + b_1, a')$

$$a + a' = a + b = a', \text{ weil } a > a'$$

$$\text{b. } a' = a + b \quad , \quad a' > a + b$$

unmöglich; heißt man: falsch

$$m = b_1, \quad d = b, \quad n = a$$

erfolgt (5) zufolge (2) erfüllt ist, und es -
heißt, daß zufolge (5)

$$b_1 + b_2 - b = b_1$$

ist, so gilt (2) in (5) über. N. 3. 5. 283

Man versteht jetzt nur, M. für eine
ausläufige Modulgruppe, d. h. die Menge
des in M enthaltenen Moduls für
endlich. Diese Menge kann unendlich
sein, wenn M. unendlich ist.
Man bezeichnet ferner mit α den größten
gemeinsamen Teiler, mit γ den kleinsten
gemeinsamen Vielfachen eines in M. ent-
haltenen Moduls, beide sind ebenfalls in
M. enthalten, und jedes Modul in M.
genügt der Bedingung -

$$0 < m < \gamma$$

Es soll ferner ein reelles Teiler von M,
und ein reelles Vielfaches von M.
(in M), sein

- 1) $m = \alpha$ ist,
- 2) m, γ teilerfremd sind.
- 3) m hat - die beiden einzigen Modulen
(in M) sind, die zugleich Teiler von m
und Vielfache von m sind

2) Man versteht unter reellen teilerfremden
Modulen m, γ -

- 1) m ein reelles Teiler von m
- 2) γ ein reelles Vielfaches von m

Dann gilt Folgendes

Satz: Ist m teilerfremd von γ , so gibt
es mindestens ein reelles Vielfaches von m ,
ist ein Vielfaches von γ , so gibt es mindestens
einen reellen Teiler von m .

Beweis: Dann wenn m teilerfremd von γ ist,
so ist entweder γ selbst ein reelles Vielfaches
von m , oder es gibt einen von beiden γ und
einen Modul γ' , welcher die Bedingung
 $m = \gamma' \cdot \gamma$ genügt, und wenn γ' ein reelles
reelles Vielfaches von m ist, so gibt es einen
von m, γ' teilerfremden Modul γ'' , welcher
die Bedingung $m = \gamma' \cdot \gamma''$ genügt, und
so kann man fortfahren, und es gibt in M.
Teile des Moduls $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$ ein reelles
reelles Vielfaches von m aufzuheben, weil M. Menge
aller Modulen in M. unendlich ist. Es gilt
das Ganze der gegebenen Teiler.

9. Satz. Befindet das Modul m ganz zur
linken äusseren Theilgruppe a, b , so gilt

$$a + b = m;$$

mit $a - b$ ist ein äusserer Theilgruppe von
von a , mit $a - b$. Befindet das Modul
in ganz äusseren äusseren Theilen a, b ,
so gilt

$$a - b = m;$$

mit $a + b$ ist ein äusserer Theilgruppe von a ,
mit $a - b$.

Beweis des ersten Theils. Gekennzeichnet ist
ein gemeinschaftlicher Theil von a, b ,
also

$$a > a + b > m,$$

$$b > a + b > m.$$

Wäre nun $a + b$ gleichmächtig von m , so müsste,
wäre a mit b äusserer Theilgruppe von m
sein, $a + b = a = b$ sein, welches mit a, b
nicht gleichmächtig sein könnte; also
gleichmächtig von b sein. Nun sei b_1 irgend
ein Theil der Theilgruppe

$$a - b > b_1 > b$$

genügendes Modul; folglich dann

$$a' = a + b_1;$$

so gilt (nach 7.)

$$a + b < a' < a, \text{ also } m = a' - a$$

mit

$$b_1 = b - a'.$$

Da nun a ein mit b äusserer Theilgruppe von m ist,
so liegt a' mit einem der beiden Module m, a ,
mit folglich b_1 mit einem der beiden

Module $b - m = b$, $a - b$ identisch sein; folglich
ist $a - b$ ein äusserer Theilgruppe von b , also
die Theilgruppe irgend mit ein mit b gleich-
mächtig von $a - b - b_1$. (Nimmt $a - b$ äusseren äusseren Theilgruppe von b auf.)

Beweis des zweiten Theils (Rechtsseitig) setzen
falls ist ein gemeinschaftlicher Theilgruppe von a, b ,
also

$$a < a - b < m$$

$$b < a - b < m;$$

Wäre nun $a - b$ gleichmächtig von m , so müsste b ,
wäre a, b äusserer Theilgruppe von m sein, $a - b$
 $= a = b$, welches mit a, b nicht gleichmächtig sein könnte;
also $a - b = m$. Nun sei a' irgend ein Theil
der Theilgruppe

$$a + b < a' < a$$

genügendes Modul; folglich dann

$$b_1 = b - a';$$

so gilt (nach 7.)

$$a - b > b_1 > b, \text{ also } m = a - b_1$$

mit

$$a' = a + b_1.$$

Man sieht $a - b$ gleichmächtig von b (also
von m). Nun wäre $a - b = b$, also $b > a$ was
nicht ist, also ist a, m nicht gleichmächtig sein,
bestehen die äusseren Theilgruppe von m .

folglich $a + b$ gleichmächtig von a (also von m).
Nun wäre $a + b = a$, also $b < a$ was nicht ist,
so wäre, wäre a, b , in allen gleichmächtig
sein, a best. äusseren Theilgruppe von m .

Da nun b ein mögliches Spielers sein ist,
so muß b mit einem der beiden Modelle
in a oder b , c , mit a mit einem der
beiden Modelle a , b oder c beschränken;
und da letztere zugeordnet sind, so ist das
eine mit b ein mögliches Spielers sein ist,
das Spielers gegen a und b . (M. 3. 2. 1)

Nun wird man, wenn beginnend, eine
Reihe von Modellen

$$a, a_1, a_2, \dots$$

indem jedes Spielers ein mögliches Spielers das sein
kann ist, da kein Spielers das sein
kann und einem Spielers a beschränken
kann, und a beschränkt das eine endliche
Reihe von Modellen in M gibt, so muß
diese Reihe unendlich sein mit
mit einem Spielers a beschränkt, a_1 beschränkt = a ,
ist, weil a (nach b) die Reihe auf fort,
zugeordnet werden kann. Für solche Reihe
von Modellen, eine vollständige Reihe
des endlichen Spielers M heißen. Dann
ist folgendes

10. Satz. Alle vollständigen Reihen eines
endlichen Spielers beschränken auf gleich vielen
Spielern. Diese Reihe ist eine endliche Reihe der
Länge des Spielers M (M. 3. 2. 1)

Beweis. Ist M irgend eine endliche Reihe
von Spielern, so ist M ein Spielers, der
alle Modelle a beschränken, a_1 beschränkt M
ist, und a_1 beschränkt, a_2 beschränkt M ist, und
Spielers M ganz M ist (wie M ist).
Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers, und
Spielers M beschränkt M beschränkt M ist. Dies
ist

$$a, a_1, a_2, \dots$$

$$a, b, c, \dots$$

es gibt ganz vollständige Reihen des Spielers
 M ganz M ist, so ist M ein Spielers, der
alle Modelle a beschränken, a_1 beschränkt M
ist, und a_1 beschränkt, a_2 beschränkt M ist, und
Spielers M ganz M ist (wie M ist).
Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers, und
Spielers M beschränkt M beschränkt M ist. Dies
ist

$$a, a_1, a_2, \dots$$

$$a, b, c, \dots$$

Länge einer endlichen Reihe M ist
begrenzt mit M

Länge einer endlichen Reihe

10. Satz. Alle vollständigen Reihen eines

$$a, a_1, a_2, \dots$$

eines vollständigen Reihe des Spielers M

ist, sind die Modelle

$$a, a_1, a_2, \dots$$

eine vollständige Reihe des Spielers M

aller diejenigen in M aufstellen, die

den M beschränken, und die M beschränken

$$a, a_1, a_2, \dots$$

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

genügen. Ist M ein Spielers, so ist M ein Spielers

gehörigste (nicht in Bezug auf die Gruppe M_2)
ein mögliches System der folgenden, für sich
dieses vollständige System der folgenden
Gruppe M_2 . Wenn M_2 in M_1 ist, und die
Systeme M_2 und M_1 gleich vielen Modellen M_2
für M_2 haben, dann die beiden folgenden Modellen
und gleich vielen Modellen M_2 , und folgend
jeweils diesen Satz der Satz bezeugen (die
Länge von M_2 ist $2 + 2$ der Länge von M_1)
Nun also gegeben die Modelle a, b , und
aus die Gruppe M_1 , b vollständig, ist
(folgt 9) die Modelle $a - b = c$ als möglich
Anfangs gegeben von a und von b , also
aus in M_1 und in M_2 enthalten. Folglich
auch die Gruppe K aller Modelle M_1 ,
welche den Bedingungen $1 < 2 < 3$ genügen,
ist

$1, 2, 3, \dots, 9$
eine vollständige Reihe dieser Gruppe, ist
(siehe Anhangsbeilage zum Satz 10.)

$1, 2, 3, \dots, 9$
eine vollständige Reihe von M_1 , also

$1, 2, 3, \dots, 9$
eine vollständige Reihe von M_2 , ist dies
in die Länge von M_1 , ist (da die Größe von
 M_1 und M_2 gleich ist) noch die
Größe von M_1 der obigen Reihe

$1, 2, 3, \dots, 9$
 $1, 2, 3, \dots, 9$

ist folgend M_2 die gemeinsame Eigenschaft
der beiden vollständigen Reihen

$1, 2, 3, \dots, 9$
 $1, 2, 3, \dots, 9$

$1, 2, 3, \dots, 9$

Gerade ist die folgende Anordnung aller
Modelle einer einzigen Gruppe M_1 auf M_2
denn Gruppe von 1 größer ist als die Länge von
 M_1 . Nachdem man eine vollständige Reihe von
Modellen (sagt $1, 2, 3, \dots, 9$) gegeben hat,
soll unter die M_1 der Modelle in M_2
sagt $1 + 1$ gegeben werden, also 1 die
Länge der Gruppe M_2 , in beiden ist. Dann
gibt der Satz

der Satz: Sind a, b beliebige Modelle der
Gruppe M_1 , so ist

$$1(a) + 1(b) = 1(a+b) + 1(a-b)$$

Womit ist auf Satz 9. Sind die M_1 Modelle

$1, 2, 3, \dots, 9$
 $1, 2, 3, \dots, 9$

ist M_1 vollständig, vollständige Reihe

ist M_1 vollständig, vollständige Reihe

ist M_1 vollständig, vollständige Reihe

ist M_1 vollständig, vollständige Reihe

ist M_1 vollständig, vollständige Reihe

Allgemeines: Ist ein gegeben ein Modell
der Gruppe M_1 , sind dann $1, 2$ die Gruppen
beliebigen Modelle $1, 2$ in M_1 , welche den
Bedingungen $1 < 2 < 3$ genügen, so
angehen, so stellen die Modelle

$1, 2, 3, \dots, 9$ eine vollständige Reihe von M_1
 $1, 2, 3, \dots, 9$ eine vollständige Reihe von M_1
so stellen die Modelle

$1, 2, 3, \dots, 9$ eine vollständige Reihe von M_1
eine vollständige Reihe von M_1

Die Länge von M_1 ist also gleich der Länge von M_2

$$L(M_1) = L(M_2) + L(M_3)$$

$$L(M_1, b) = L(M_1, a) + L(M_2, a-b)$$

$$L(M_1) = L(M_2) + L(M_3)$$

$$L(M_1, a+b, a) = L(M_2, a-b)$$

$a_n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, a_{n+1} \in \mathfrak{a}'_1, a'_2 = a_1$
 eine geordnete Folge von Modulen des Systems $M_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{a}}$
 Das folgt aus

$$b_1^{(1)} = b - a'_1$$

bedeutet die erste Modul

$$b_1^{(1)} = b, b_2^{(1)} = b_1^{(1)}, \dots, b_{n-1}^{(1)} = a - b, b_n^{(1)} = a - b$$

eine geordnete Folge von Modulen des Systems $M_{b, a-b}$
 Das folgt aus

$$M_{a+b, a} = M_{b, a-b}$$

z. Z.

$$s(n) - s(n+b) = s(a-b) - s(-b)$$

und $s(-b) = 0$ da $-b \in \mathfrak{a}$

$$s_{n+1} \leq a'_1, \text{ also } a'_{n+1} - a'_n \leq a'_n$$

es folgt

$$b_1^{(r)} - b_1^{(r+1)} = (b - a'_n) - (b - a'_{n+1}) = b - a'_n = b_1^{(r)}$$

Es ist

$$b_1^{(r+1)} \leq b_1^{(r)}$$

Da $a'_n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$

$$a'_n = a + b_1^{(r)}$$

Es ist $b_1^{(r)}$ und $b_1^{(r+1)}$ verschiedene, nicht

gleiches $a'_n = a'_{n+1}$ wäre. Somit kann

ein Modul $b_1^{(r)}$ der Bedingungen

$$b_1^{(r+1)} \leq b_1^{(r)} \leq b_1^{(r)}$$

Das folgt aus

$$a' = a + b_1$$

Es ist (siehe $b \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$)

$$b_1 = b - a' \text{ (und } a + b \leq a' \leq a'')$$

Es ist

$$a'_n + a' = (a + b_1^{(r)}) + (a + b_1) = a + b_1 = a'$$

$$a'_{n+1} + a' = (a + b_1^{(r+1)}) + (a + b_1) = a + b_1 = a'_{n+1}$$

also

$$a'_{n+1} \leq a' \leq a'_n$$

Wir zeigen a' mit einem der letzten Module

a'_n, a'_{n+1} folgend auf $b_1^{(r)}$ mit einem der

ersten Module

$$b - a'_n = b_1^{(r)}, b - a'_{n+1} = b_1^{(r+1)}$$

Es gilt $b_1^{(r+1)} \leq b_1^{(r)}$ und $b_1^{(r)}$ ist ein

Teil von $b_1^{(r+1)}, (r+1) \leq r$









