Théorème sur les modules (chaînes)

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

2 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreThéorème sur les modules (chaînes)
Date1894-1897
Sujet

- chaînes
- combinaisons
- modules
- modulgruppen

CoteCod. Ms. Dedekind XI 1, p. 28
Format1 f. ; 2 p.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionThéorème sur les modules : Les modules σ_r (r parcourt les entiers) forment une chaîne donnée, alors un groupe est engendré qui vérifie certaines conditions...
Preuve du résultat.
Mode(s) d'écritureTexte rédigé
Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Mots-clefs

chaînes, combinaisons, modules, Modulgruppen
Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 26/10/2018 Dernière modification le 17/09/2020

<u>Modulsatz</u>. Bilden die Moduln $\mathfrak{o}_r$, wo r alle ganzen rationalen Zahlen durchläuft, eine <u>Kette</u> von der Art

$$\mathfrak{o}_r < \mathfrak{o}_{r+1}, \qquad (1)$$

so wird durch einen hinzutretenden Modul $\mathfrak{a}$ eine <u>Gruppe</u> erzeugt, welche ausser den bisherigen nur noch die Moduln

$$\mathfrak{p}_r = \mathfrak{a} + \mathfrak{o}_r \quad , \quad \mathfrak{q}_r = \mathfrak{a} - \mathfrak{o}_r \qquad (2, 3)$$

und, wenn $r < r'$ (<u>besser</u> $r \leqq r'$; $\mathfrak{m}_{r,r} = \mathfrak{o}_r$)

$$\mathfrak{m}_{r,r'} = \mathfrak{q}_r + \mathfrak{o}_{r'} = \mathfrak{p}_{r'} - \mathfrak{o}_r \qquad (4)$$

enthält (die Doppelform (4) folgt aus dem <u>Klammersatz</u> der Modultheorie $(\mathfrak{a} - \mathfrak{o}_r) + \mathfrak{o}_{r'} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{o}_{r'}) - \mathfrak{o}_r$, weil $\mathfrak{o}_r < \mathfrak{o}_{r'}$).

<u>Beweis</u>. Bedeutet <u>immer</u> u die (algebraisch) kleinste, v die grösste der beiden Zahlen r, s, so folgen aus der Kette (1) die Combinationen
(von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}$)

$$\mathfrak{o}_r + \mathfrak{o}_s = \mathfrak{o}_u \quad , \quad \mathfrak{o}_r - \mathfrak{o}_s = \mathfrak{o}_v \qquad (5)$$

Ebenso bilden zufolge (2, 3) die $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ eine Kette

$$\mathfrak{p}_r < \mathfrak{p}_{r+1} < \mathfrak{a} < \mathfrak{q}_s < \mathfrak{q}_{s+1}, \qquad (6)$$

also ist (<u>Combinationen</u> von $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{p}_r + \mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}_u \,;\; \mathfrak{p}_r - \mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}_v \,;\; \mathfrak{q}_r + \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_u \,;\; \mathfrak{q}_r - \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_v \\
\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}_r ,\; \mathfrak{a} - \mathfrak{p}_r = \mathfrak{a} ,\; \mathfrak{a} + \mathfrak{q}_r = \mathfrak{a} ,\; \mathfrak{a} - \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_r \\
\mathfrak{p}_r + \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p}_r \,;\; \mathfrak{p}_r - \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_s
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Die Moduln $\mathfrak{m}$ in (4) bilden für sich eine <u>Gruppe</u>; bedeutet nämlich u' die kleinste, v' die grösste der Zahlen r', s', so folgt aus $r < r'$ und $s < s'$ auch $u < u'$ und $v < v'$, und zufolge (4, 5, 7) wird

$$\mathfrak{m}_{r,r'} + \mathfrak{m}_{s,s'} = \mathfrak{m}_{u,u'}, \quad \mathfrak{m}_{r,r'} - \mathfrak{m}_{s,s'} = \mathfrak{m}_{v,v'}. \qquad (8)$$

Die Combinationen von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{m}$ geben zufolge (4, 2, 3, 7)

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{m}_{r,r'} = \mathfrak{y}_{r'}, \quad \mathfrak{x} - \mathfrak{m}_{r,r'} = \mathfrak{q}_r \qquad (9)$$

Die Combinationen von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{y}, \mathfrak{q}$. Zunächst zufolge (2, 3, 5)

$$\mathfrak{y}_r + \mathfrak{o}_s = \mathfrak{y}_u, \quad \mathfrak{q}_r - \mathfrak{o}_s = \mathfrak{q}_v \qquad (10)$$

Die in (4) ausgeschlossenen Combinationen sind

$$\mathfrak{q}_{r'} + \mathfrak{o}_r = \mathfrak{o}_r, \quad \mathfrak{y}_r - \mathfrak{o}_{r'} = \mathfrak{o}_{r'} \text{ für } r \leqq r' \qquad (11)$$

<u>Hierauf zurück</u> kommen die Combinationen von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{m}$ durch

$$\mathfrak{m}_{r,r'} + \mathfrak{o}_s = \mathfrak{q}_r + (\mathfrak{o}_{r'} + \mathfrak{o}_s), \quad \mathfrak{m}_{r,r'} - \mathfrak{o}_s = \mathfrak{y}_{r'} - (\mathfrak{o}_r - \mathfrak{o}_s), \qquad (12)$$

ebenso die Combinationen von $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{y}, \mathfrak{q}$ durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}_{r,r'} + \mathfrak{y}_s &= \mathfrak{y}_s + \mathfrak{o}_{r'} && = \mathfrak{y} \\ \mathfrak{m}_{r,r'} - \mathfrak{y}_s &= (\mathfrak{y}_{r'} - \mathfrak{y}_s) - \mathfrak{o}_r && = \mathfrak{y} - \mathfrak{o} \\ \mathfrak{m}_{r,r'} + \mathfrak{q}_s &= (\mathfrak{q}_r + \mathfrak{q}_s) + \mathfrak{o}_{r'} && = \mathfrak{q} + \mathfrak{o} \\ \mathfrak{m}_{r,r'} - \mathfrak{q}_s &= \mathfrak{q}_s - \mathfrak{o}_r && = \mathfrak{q} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Also geben alle Combinationen wieder Moduln $\mathfrak{x}, \mathfrak{o}, \mathfrak{y}, \mathfrak{q}, \mathfrak{m}$,

u. s. w.