# Exemple le plus simple d'un système S qui n'est pas modulaire

### Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

6 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

## Présentation

TitreExemple le plus simple d'un système S qui n'est pas modulaire
Date1894-1897
Sujet

- divisibilité
- notation générale
- système non modulaire

CoteCod. Ms. Dedekind XI 1, p. 25-27.
Format4 f. ; 8 p.
LangueAllemand

## Description & Analyse

DescriptionEtude assez générale semi-rédigée d'un système non-modulaire. Pas de mention des Dualgruppen. Références aux Vorlesungen 1894.
Mode(s) d'écriture

- Aufgaben
- Texte rédigé

Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

## Relations

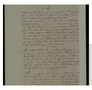
#### Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1

*Ce document est à lire avec :*

 Sur le dualisme dans la théorie des modules

**Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1**

*Ce document utilise la même notation que :*

 [Étude d'un groupe] de type module

Afficher la visualisation des relations de la notice.

## Mots-clefs

divisibilité, notation-generale, système non modulaire

Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 26/10/2018 Dernière modification le 17/09/2020

Einfachstes Beispiel eines nicht modul-artigen Systems $S$.

| | | |
|---|---|---|
| $m'$ hat Divisoren | $m', m, a, d, d'$ | Multipla $m'$ |
| $m$ " " | $m, d, d'$ | " $m', m$ |
| $a$ " " | $a, d'$ | " $m', a$ |
| $d$ " " | $d, d'$ | " $m', m, d$ |
| $d'$ " " | $d'$ | " $m', m, a, d, d'$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m' > m, a$ | $\cancel{a < m'}$ | $d' < d, a$ | nächste Divisoren und Multipla |
| $m > d$ | | $d < m$ | |
| $a > d'$ | | $a < m'$ | |
| $d > d'$ | | $m < m'$ | |

$m'\varphi_1 = m, a$ ; $m'\varphi_2 = d, d'$ ; $m'\varphi_3 = d'$ | $d'$ gem. El. von $m'\varphi_2$ und $m'\varphi_3$

$m\varphi_1 = d$ , $m\varphi_2 = d'$

$a\varphi_1 = d'$ 25

$d\varphi_1 = d'$

$A\varphi_1$ System der nächsten Theile der Elemente von $A$. | $A\varphi' = A, A\varphi_1, A\varphi_2 \ldots$, $A\varphi_{r+1} = (A\varphi_r)\varphi_1$

Allgemein: $a\varphi_1$ und $a\varphi_r$ haben kein gemeinsames Element, wo $r > 1$

Wäre nämlich $u$ ein solches, so gibt es in $a\varphi_{r-1}$ ein Element $b$ der Art, dass $u$ in $b\varphi_1$ enthalten,

$$a > u \quad , \quad b > u$$

und da $b$ in $a\varphi' = a, a\varphi_1, a\varphi_2 \ldots$ enthalten, also $a > b$ ist, so wäre

$$a > b > u$$

mithin, da $u$ nächster Divisor von $a$ ist, entweder $b = a$ oder $b = u$

(Vorher: $a$ ist in keinem System $a\varphi_r$ enthalten, wenn $r > 0$)

Deshalb kann $b$ nicht $= a$ sein; ebensowenig $b = u$, weil alle Elemente von $b\varphi_1$ verschieden von $b$ sind.

---

$a\varphi_2$ und $a\varphi_3$ können gem. Elem. haben

$a\varphi_2$ und $a\varphi_4$ ? etwa $u$ ? es sei $u$ nächster Theiler von dem in $a\varphi_1$ enthaltenen $b$ und dem in $a\varphi_3$ enthaltenen $c$ ; $b > u$ , $c > u$

~~also~~ $a > b > u$ und $a > a_1 > a_2 > c > u$ ? ?

---

Sind $b, c$ in $a\varphi_1$ enthalten und verschieden, so ist $a = b\psi c$ ; denn setzt man $b\psi c = a_1$, so folgt $a > a_1$ (weil $a > b$ und $a > c$), also $a > a_1 > b$ und $a > a_1 > c$ ; wäre nun $a_1$ verschieden, so müsste $a_1$ (weil $b, c$ nächste Theiler von $a$ sind) sowohl $= b$, als auch $= c$, mithin $b = c$ sein, wider Hyp. —

merkung möge zugleich den Übergang bilden zu dem folgenden Fundamentalsatze (vergl. D. S. 518):

Wenn aus dem endlichen Modul [a] sich n und nicht mehr Zahlen so auswählen lassen, daß sie ein nach Z irreducibeles System bilden; so ist $\mathfrak{a}$ darstellbar als Summe von n (und nicht weniger) einfachen Moduln.

In der That, wenn die in $\mathfrak{a}$ enthaltenen n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ein nach Z irreducibeles System bilden, so ist jede beliebige Zahl $\alpha$ in $\mathfrak{a}$ von der Form

$$\alpha = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_n\alpha_n,$$

wo die Koefficienten $h_\nu$ Zahlen des Körpers Z bedeuten. Da nun $\mathfrak{a}$ ferner ein endlicher Modul, also von der Form

$$\mathfrak{a} = [\alpha'_1, \alpha'_2 \ldots \alpha'_m]$$

ist, so kann man jede der m Basiszahlen $\alpha'_\mu$ in der eben angegebenen Form

$$\alpha'_\mu = h_1^{(\mu)}\alpha_1 + h_2^{(\mu)}\alpha_2 + \cdots + h_n^{(\mu)}\alpha_n$$

darstellen, bekanntlich eine von Null verschiedene Zahl e so wählen, daß alle mn Produkte $e h_\nu^{(\mu)}$ ganze Zahlen des Körpers Z werden, also in Z enthalten sind. Setzt man nun $\alpha_\nu = e\omega_\nu$, ~~[illegible]~~ und

$$\mathfrak{o} = z\omega_1 + z\omega_2 + \cdots + z\omega_n,$$

so leuchtet ein, daß die m Basiszahlen $\alpha'_\mu$ in $\mathfrak{o}$ enthalten sind; mithin ist $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{o}$, und da $\mathfrak{o}$ eine Summe von n einfachen Moduln ist, so gilt (nach dem vorhergehenden Satze ) dasselbe auch von $\mathfrak{a}$, w. z. b. w.

Die Operation $\varphi$ muss (wenn die Systeme $a\varphi'$, also auch die $a\varphi'$ gegeben sind) so beschaffen sein, dass, wenn $m$ ein beliebiges Element bedeutet, $m\varphi'$ der Inbegriff aller Elemente $d$ ist, welche der Bedingung $m\varphi d = d$ genügen.

Denn wenn $a\varphi d = d$, so ist $d\varphi'$ der Durchschnitt von $a\varphi'$, $d\varphi'$, jedenfalls Theil von $a\varphi'$, weil $d$ zufolge ? Element von $a\varphi'$; und umgekehrt, wenn $d$ irgend ein Element von $a\varphi'$ bedeutet, so ist $d\varphi'$ zufolge ? Theil von $a\varphi'$, also auch der Durchschnitt der Systeme $a\varphi'$, $d\varphi'$, mithin ~~$a\varphi d = d$~~ zufolge der Definition von $\varphi$ [illegible] auch $a\varphi d = d$, w. z. b. w.

26

besteht, daß $d$ in dem System $m\varphi'$ enthalten ist, und wir wollen ~~hierauf erklären wir, wenn $d$ ein beliebiges Element ist,~~ das System $d\varphi'$ als den Inbegriff aller dieser Elemente $m$ erklären. Die ~~zwei der Satz, daß $d$ Element, also $a\varphi'$ Theil von $m\varphi'$~~ beiden Aussagen, ~~ist, daraus ist es also vollkommen gleichbedeutend, ob man sagt~~, $d$ sei Element von $m\varphi'$, oder $m$ sei Element von $d\varphi'$, ~~und da zufolge β. immer $d$ Element von $d\varphi'$, also $d$ auch Element von $d\varphi'$ ist, so ergeben sich hieraus die beiden ersten der folgenden Sätze:~~ sind daher vollkommen gleichbedeutend. Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

α'. Jedem Elemente $a$ des Systems $S$ entspricht ein vollständig bestimmtes System $a\varphi'$, welches ein Theil von $S$ ist.

β'. Das Element $a$ ist in $a\varphi'$ enthalten, also Element des Systems $a\varphi'$. – Denn $a$ ist zufolge β. Element von $a\varphi'$.

γ'. Aus $a\varphi' = b\varphi'$ folgt $a = b$. – Denn zufolge β'. ist $a$ in $a\varphi'$, also in $b\varphi'$ enthalten, d. h. $b$ ist in $a\varphi'$ enthalten, woraus nach δ'. folgt, daß $b\varphi'$ Theil von $a\varphi'$ ist; und da ebenso sich ergiebt, daß $a\varphi'$ Theil von $b\varphi'$ ist, so folgt $a\varphi' = b\varphi'$ und hieraus nach γ. auch $a = b$, w. z. b. w.

δ'. Ist $m$ Element von $a\varphi'$, so ist $m\varphi'$ Theil von $a\varphi'$. – Denn zufolge der Annahme ist $a$ Element von $m\varphi'$, woraus nach δ. folgt, daß $a\varphi'$ Theil von $m\varphi'$ ist; wenn daher $n$ irgend ein Element von $m\varphi'$ bedeutet, so ist ebenso $m$ Element von $n\varphi'$, und $m\varphi'$ Theil von $n\varphi'$; mithin ist auch $a\varphi'$ Theil von $n\varphi'$, also das nach β. in $a\varphi'$ enthaltene Element $a$ auch in $n\varphi'$ enthalten, d. h. $n$ ist Element von $a\varphi'$, w. z. b. w.

$$\beta_\nu = c_\nu^{(\nu)}\alpha_\nu + c_{\nu+1}^{(\nu)}\alpha_{\nu+1} + \cdots + c_n^{(\nu)}\alpha_n \qquad (\quad)$$

setzen, wo die Zahlen $c_\mu^{(\nu)}$ in $y_\nu^{-1} x_\mu$ enthalten sind, nach den Bedingungen

$$y_\nu c_\mu^{(\nu)} > x_\mu \qquad (\quad)$$

genügen [Multiplicirt man endlich die $n$ Gleichungen ( ), und bedenkt, daß nach §. das Product der Factoren $(y_\nu ; x_\nu)$ identisch mit $(a; b)$ ist, so erhält man

und zufolge ( ) auch für den Fall $\mu = \nu$ gilt.

$$(a; b)\,\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}\mathfrak{C}, \qquad (\quad)$$

wo

$$\mathfrak{X} = x_1 x_2 \ldots x_n,\ \mathfrak{Y} = y_1 y_2 \cdots y_n,\ \mathfrak{C} = c_1' c_2'' \ldots c_n^{(n)} \qquad (\quad)$$ 27

gesetzt ist; und zugleich wird

$$a = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \qquad (\quad)$$

$$a - b = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n, \qquad (\quad)$$

wo die Idealbrüche $y_\nu$ und die Zahlen $\beta_\nu$, $c_\mu^{(\nu)}$ den Bedingungen ( ), ( ), ( ) genügen (vergl. D. §. 517, wo aber die umgekehrte Folge der Indices gewählt ist). –

Zur Erläuterung der allgemeinen Darstellung von $y_\nu$ bemerken wir noch, daß die in den Gleichungen ( ), ( ), ( ) sich zwar einfacher aus der Bedingung $a y_\nu = a_{\nu+1}$, $b_1 = a'_{\nu-1} b$ ist ~~[illegible]~~ in ( ) ergiebt; aber hieraus würde auch mit Zuziehung der beiden anderen Bedingungen ( ) ~~nicht mit Nothwendigkeit~~ die wichtige Beziehung ( ) nicht gefolgert werden können, wenigstens nicht ohne die neu hinzutretende Voraussetzung, daß die $n$ Zahlen $\alpha_\nu$ ein in Bezug auf den Körper Z irreducibeles System bilden. Diese Be-

__Satz__. Sind $a, b$ verschieden, und haben $a\varphi_1$, $b\varphi_1$ ein gemeinsames Element $d$, so ist $a\varphi b = d$, (und $d$ ist verschieden von $a$ und $b$, natürlich)

__Beweis__. Da $a > d$ und $b > d$, so ist auch $a\varphi b > d$, also

$$a > a\varphi b > d\ ;\ b > a\varphi b > d,$$

wäre nun $a\varphi b$ verschieden von $d$, so müsste (nach Definition der __nächsten__ Theile $\varphi_1$) $a\varphi b$ sowohl $= a$, als $= b$, mithin $a = b$ sein, contra hyp. Also $a\varphi b = d$, w. z. b. w.

__Folgerung__. Sind $a, b$ verschieden, so können $a\varphi_1$, $b\varphi_1$ __höchstens ein__ gem. Element haben. – Denn wenn $d$, $d'$ gemeinsame Elemente von $a\varphi_1$, $b\varphi_1$ sind, so ist $a\varphi b$ sowohl $= d$, als $= d'$, mithin $d = d'$, w. z. b. w.

---

__Satz__. Sind $a, b$ zwei verschiedene Elemente von $m\varphi_1$, so ist $a\psi b = m$

__Beweis__. Denn aus $m > a$, $m > b$ folgt $m > a\psi b > a$, $m > a\psi b > b$; wäre nun $a\psi b$ verschieden von $m$, so müsste (nach Def. von $\varphi_1$) $a\psi b$ sowohl $= a$, als $= b$, mithin $a = b$ sein (contra hyp.); also ist $a\psi b = m$, w. z. b. w.

Daraus dieselbe __Folgerung__, wie oben.