Deux Modulketten a et b

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

4 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreDeux Modulketten a et b
Date1878-188x
Sujet

- chaînes
- groupe de modules
- Modulgesetz
- Treppen
- trois modules

CoteCod. Ms. Dedekind X 10, p. 8-9
Format1 f. ; 2 p.
LangueAllemand

Description & Analyse

Description

Page 8. Deux chaînes de modules a (m membres) et b (n membres), on construit c=a-b et d=a+b. Étude des différentes relations. En marge : "Les PGCD formés par a, b, a-b correspondent aux PPCM formés par a, b, a+b et forment donc **un groupe**."
Manipulation des opérations et relations autour du Modulgesetz. Généralisation de l'égalité à un nombre quelconque de modules.
Théorème général et preuve.

Au verso, quelques notes (mêmes égalités ?) avec la notation des morphismes / Abbildungen.

Page 9. Suite des calculs pour la preuve du théorème.

Séparation. Etude pour trois modules. Operations, Treppen, diagrammes, Ketten.

Verso : Schöner Satz falsch, 1889. 1. 4.
Calculs sur des modules finis (exemple ?)

Mode(s) d'écriture

- Calculs
- Diagrammes
- Esquisse de rédaction ou preuve

Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Mots-clefs

chaînes, groupe de modules, Modulgesetz, Treppen, trois modules
Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 15/01/2019 Dernière modification le 17/09/2020

Zwei Modulsysteme: a [illegible]; b [illegible] Daraus gebildet alle $r = a - b$ [illegible]; $\mathfrak{d} = a + b$ [illegible]

Also $a - r$ sind [illegible] r; $b - r$ [illegible] r; $a + \mathfrak{d}$ [illegible] $\mathfrak{d}$; $b + \mathfrak{d}$ [illegible] $\mathfrak{d}$; $a \pm a'$ [illegible] a; $b \pm b'$ [illegible] b; $r - r'$ [illegible] r; $\mathfrak{d} + \mathfrak{d}'$ [illegible] $\mathfrak{d}$

Weiter zu bilden alle

$$a + r = a + (a' - b)$$
$$b + r = b + (a - b')$$
$$a - \mathfrak{d} = a' - (a' + b)$$
$$b - \mathfrak{d} = b' - (a + b')$$
$$r + r' = (a - b) + (a' - b')$$
$$\mathfrak{d} - \mathfrak{d}' = (a + b) - (a' + b')$$
$$r + \mathfrak{d} = (a - b) + (a' + b')$$
$$r - \mathfrak{d} = (a - b) - (a' + b')$$

[illegible], wenn $a > a'$ [illegible]; $b > b'$ [illegible]

Die aus $a, b, a - b$ gebildeten gr.-gem. Theiler stimmen überein mit den aus $a, b, a + b$ gebildeten kl. gem. Vielfachen, und bilden folglich eine Gruppe.

$a > a'$; $b' > b$; so ist

$(a+b) - (a'+b') =$
$(b - (a'+b')) + a$
$= (a' - b + b') + a$
$= (a' - b) + a + b'$

und $(a - b) + (a' - b') = (a + (a' - b')) - b$
$= ((b' + a) - a') - b = a' - b - (a + b')$

$a + r = a + (a' - b) = a$, wenn $a < a'$
$= a' - (a + b)$, wenn $a > a'$

$a > a' > a''$
$b < b' < b''$

$(a - b) + (a' - b') + (a'' - b'')$
$= (a'' - b'') + \{a' - b - (a + b')\}$
$= (a + b' + (a' - b')) - (a'' - b)$
$= \{a + (a' + b'') - b'\} - (a'' - b)$
$= (a + b') - (a' + b'') - a'' - b$

Ferner ist
$= (a' - b - (a + b')) + (a'' - b'')$
$= (b'' + (a' - b - (a + b'))) - a''$
$= (a' + b'') - b - (a + b') - a''$

Ebenso, wenn $a'' > a'''$; $b'' < b'''$

$(a - b) + (a' - b') + (a'' - b'') + (a''' - b''') =$
$((a + b') - (a' + b'') - a'' - b) + (a''' - b''') = (b''' + ((a + b') - (a' + b'') - a'' - b)) - a'''$
$= (a'' + b''') - ((a + b') - (a' + b'') - b) - a''' = (a + b') - (a' + b'') - (a'' + b''') - a''' - b$

Allgemeiner Satz: Ist
$a > a' > a'' > \dots > a^{(r)}$
$b < b' < b'' < \dots < b^{(r)}$
so ist

$(a - b) + (a' - b') + \dots + (a^{(r)} - b^{(r)}) = (a + b') - (a' + b'') - \dots - (a^{(r-1)} + b^{(r)}) - a^{(r)} - b$

$(a + b) - (a' + b') - \dots - (a^{(r)} + b^{(r)}) = (a' - b) + (a'' - b') + \dots + (a^{(r)} - b^{(r-1)}) + a + b^{(r)}$

Also

$(a + b) - (a' + b') - \dots - (a^{(r-1)} + b^{(r)}) = (a' - b) + (a'' - b') + \dots + (a^{(r-1)} - b^{(r-1)}) + a + b^{(r)}$

[illegible]

$(a' - b') + \dots + (a^{(r)} - b^{(r)}) = (a' + b'') - \dots - (a^{(r-1)} + b^{(r)}) - a^{(r)} - b' = y - b'$; $y < a$

$(a' + b') - \dots - (a^{(r)} - b^{(r)}) = (a'' - b') + \dots + (a^{(r)} - b^{(r-1)}) + a' + b^{(r)} = y + a'$; $y > b$

folglich

$(a - b) + (y - b') = (a + b') - y - b$
$(a + b) - (a' + y) = (a' - b) + a + y$
[illegible]

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a+b) + \varphi(a-b)$ | $\varphi(a) - \varphi(a+b) = \varphi(a-b) - \varphi(b)$

$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) = \varphi(a+b+c) + \varphi((a+b)-c) + \varphi(a-b)$

$= \cancel{\varphi(\ldots)}$

$= \varphi(a+b+c) + \varphi(((a+b)-c) + (a-b)) + \varphi(a-b-c)$

$= \varphi(\ldots) + \varphi(\ldots) + \varphi(\ldots)$

$= \varphi(\ldots) + \varphi(\ldots) + \varphi(\ldots)$

$\varphi(((a+b)-c) + (a-b)) = \varphi([illegible]) + \varphi([illegible])$

$\varphi(a+b+c) + \varphi((a+b)-c) = \varphi(a+b) + \varphi(c)$

$g_2 + \varphi((a+b)-c) = g_1$

$\varphi([illegible]) = -(g_2 - g_1)$

$\varphi(a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu) = g_{\nu-1}$; $g_0 = 0$

$\varphi(a_1 - a_2 \ldots a_\nu) = -g_{\nu-1}$

$\varphi((a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu) + (a_{\nu+1} + \ldots + a_{\nu+\mu})) = g_{\nu+\mu-1}$

$\varphi((a_1 + \ldots + a_\nu) - (a_{\nu+1} + \ldots + a_{\nu+\mu}))$

$= g_{\nu-1} + g_{\mu-1} - g_{\nu+\mu-1} > 0$

1878. 1. 2.

Herrn Professor Dr. Dedekind

in

Braunschweig

frei

Leipzig

$y > \eta$; $a' = (a+y) - \eta = (a-\eta) + y$

$b' = (b+\eta) - \eta = (b-\eta) + y$

$a' - b' = (a+y) - (b+y) - \eta = \{y + ((a+y) - b)\} - \eta = ((a+y) - b - \eta) + y$

$= \{b - ((a-\eta)+y)\} + y$

$a' + b' = (a-\eta) + (b-\eta) + y = (a-\eta) + \{(b+y) - \eta\}$

$= (a + \{(b+y) - \eta\}) - \eta = (a + y + (b-\eta)) - \eta$

Drei Moduln a, b, r, aber keineswegs $b > r$, d. h. $(b, r) \ldots$

Also $m' = a^0 = b^0 = r^0 = r_1$

$$\left.\begin{array}{l|l} a' = a''' & a_2 = a_3 \\ b'' = b''' & b_2 = b_3 \\ r'' = r''' & r_2 = r_3 \end{array}\right\} \ldots = 1$$

$\mathfrak{d} = b'$, $r' = a''$, $a' = r''$, $b^0 = m'$, $b = b_2 = b_3$, $b''' = b^0 = b'' = m'$

$r_1 = m$, $b_3 = a_1$, $a_2 = b_1$, $\mathfrak{d}_1 = r_3$, $r''' = r = a''$, $r^0 = r_3 = m' = r_2$

Also

III $m' = a^0 = b^0 = r^0 = \mathfrak{d}_1 = b'' = b''' = r_2 = r_3 = (a+b) - r = (a-r) + b$

II, $a'' = a''' = r' = a+b$

IV, $a_2 = a_3 = b_1 = a-r$

II $r'' = r''' = a' = r$

IV $b_2 = b_3 = a_1 = b$

I $b' = \mathfrak{d} = a+r$

V $r_1 = m = a-b$

III und IV.

$a+r < a+b$, r

$r < m'$

~~\ldots~~,

$a+b < m'$, a

$m' < b$

~~\ldots~~ $< a$, m'

$a < a-r$

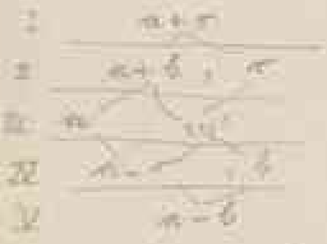
$m' < a-r$, b

$a-r < a-b$

$b < a-b$ 9

Gruppe

I.



Oder $y > \eta$ statt b, r gesetzt, a^0 statt m'

$a^0 = (a+y) - \eta = (a-\eta) + y$

5 Ketten

$a+\eta < a+y < a < a-\eta < a-y$

$a+\eta < a+y < a^0 < a-\eta < a-y$

$a+\eta < a+y < a^0 < y < a-y$

$a+\eta < \eta < a^0 < a-\eta < a-y$

$a+\eta < \eta < a^0 < y < a-y$

I. $a+\eta < a+y$, η

II. $\begin{cases} a+\eta < a+y < a, a^0 \\ a+\eta < \eta < a^0 \end{cases}$

III. $\begin{cases} a+y < a < a-\eta \\ a+y, \eta < a^0 < a-\eta, y \end{cases}$

IV. $\begin{cases} a, a^0 < a-\eta < a-y \\ a^0 < y < a-y \end{cases}$

V. $a-\eta$, $y < a-y$

Br. 18 Juni 1878. R.D.

Schöner Satz

$$\frac{a-b}{(a+b,\, a-b)} = \frac{a}{(a+b,\, a)} + \frac{b}{(a+b,\, b)}$$

1889.1.4

Hierdurch [illegible] ... [illegible] ... [illegible] ... 1878 bis Ostern 1881 [illegible] ... [illegible] ... No 4144 ... bestätigt worden ist.

Braunschweig, den 9. Juni 1878.

Der Director der Herzogl. [illegible]

[illegible]

An den Herrn Professor Dr. Dedekind hierselbst.

[illegible]