Calculs sur des modules finis 15

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

4 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreCalculs sur des modules finis 15
Date188x
Sujet

- congruences
- modules finis

CoteCod. Ms. Dedekind X 10, p. 12-13
Format2 f. ; 4 p.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionModules finis de la forme $[p_1+q_1w, p_2+q_2w \ldots p_m+q_mw] = [n, p+qw]$. Déterminer n, p, q.
Mode(s) d'écritureCalculs
Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Mots-clefs

congruences, modules finis
Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 15/01/2019 Dernière modification le 17/09/2020

$[n_1, p_1+q_1\omega, \; p_2+q_2\omega \cdots p_m+q_m\omega] = [n, p+q\omega]$; Bestimmung von q, n, p :

$[q] = [q_1, q_2 \cdots q_m]$; $[n q] = [p_1 q_2 - q_1 p_2 \cdots p_r q_s - q_r p_s \cdots p_{m-1} q_m - q_{m-1} p_m]$

$$\frac{q_r}{q}\, y \equiv p_r \pmod{n}$$

Es sei das kl. gem. Vielfache der m Moduln $[n_1, p_1+q_1\omega] \cdots [n_m, p_m+q_m\omega]$ gefunden

$\mu = n_1 x_1 + (p_1+q_1\omega) y_1 = n_2 x_2 + (p_2+q_2\omega) y_2 = \cdots = n_m x_m + (p_m+q_m\omega) y_m$

$n_1 x_1 + p_1 y_1 = n_2 x_2 + p_2 y_2 = \cdots = n_m x_m + p_m y_m = z$

$q_1 y_1 = q_2 y_2 = \cdots = q_m y_m = q' y$

q' das kl. gem. Vielfache von $q_1, q_2 \cdots q_m$; $q' = q_1 q_1' = q_2 q_2' = \cdots = q_m q_m'$

$n_1 = 3$	$n_1' = 4$
$n_2 = 4$	$n_2' = 3$
$n_3 = 6$	$n_3' = 2$

$n_1 = 4$	$n_1' = 24$
$n_2 = 6$	$n_2' = 6$
$n_3 = 8$	$n_3' = 4$

$n_r x_r + p_r \frac{Q}{q_r} y = n_s x_s + p_s \frac{Q}{q_s} y$

[illegible] ; zuerst $[n_{rs}] = [n_r, n_s]$, so muss

$\frac{p_r q_s - q_r p_s}{n_r q_s \cdots n_s}$ ganz werden

Q die kl. pos. Zahl, für welche alle $\frac{Q}{q_r}$ und ...

$\frac{n'(p_r q_s - q_r p_s) Q}{n_r q_s - n_s q_r}$ ganz werden

$n_1 x_1 + p_1 q_1' y = n_2 x_2 + p_2 q_2' y = \cdots = n_m x_m + p_m q_m' y = z$

Wie muss eine Zahl z beschaffen sein, damit die gleichzeitigen Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} p_1 q_1' y \equiv z \pmod{n_1} \\ p_2 q_2' y \equiv z \pmod{n_2} \\ \cdots \\ p_m q_m' y \equiv z \pmod{n_m} \end{array}\right\}$$

möglich sind? Es sei $n' = n_1 n_1' = n_2 n_2' = \cdots = n_m n_m'$ das kl. gem. Vielfache von $n_1, n_2 \ldots n_m$

$[\frac{1}{n}] = [\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \cdots \frac{1}{n_m}]$

$n' = [n_1', n_2' \cdots n_m']$; $n'[\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \cdots \frac{1}{n_m}]$

so sind die Congruenzen diese

$$\left.\begin{array}{l} p_1 q_1' n_1' y \equiv z n_1' \\ p_2 q_2' n_2' y \equiv z n_2' \\ \cdots \\ p_m q_m' n_m' y \equiv z n_m' \end{array}\right\} \pmod{n'}$$

$n_1', n_2' \ldots n_m'$ haben keinen gem. Th.

$z \frac{n_1'}{n''} \equiv p_1 q_1' \frac{n_1'}{n''} y$; $z \frac{n_m'}{n''} \equiv p_m q_m' \frac{n_m'}{n''} y$; mod. $\frac{n'}{n''}$

$P \equiv p_r q_r' q'' \pmod{n_r}$

$q_r P \equiv p_r q q'' \pmod{q_r n_r}$

$[N, P+Q\omega]$

Bedingungen: alle Differ. $\frac{n_s'}{n''} \frac{p_s q_s' n_s'}{n''} y - \frac{n_r'}{n''} \frac{p_r q_r' n_r'}{n''} y \equiv 0$

Bedingungen:

$n_s' p_r q_r' n_r' y - n_r' p_s q_s' n_s' y$

$= n_r' n_s' (p_r q_r' - p_s q_s') y \equiv 0 \pmod{n'}$

$= \frac{n' n'}{n_r n_s} q' \left(\frac{p_r}{q_r} - \frac{p_s}{q_s}\right) y$

also

$\frac{n' q' (p_r q_s - q_r p_s)}{n_r q_s - n_s q_r}\, y$ ganz.

$\frac{n_r' n_s' (p_r q_r' - p_s q_s')}{n'' n''} y \equiv 0 \pmod{\frac{n'}{n''}}$

d. h. alle $\frac{n_r' n_s' (p_r q_r' - p_s q_s')}{n' n''}\, y$ ganz

d. h. alle $\frac{n' q' (p_r q_s - q_r p_s)}{n'' \cdot n_r q_s \cdot n_s q_r}\, y$ ganz.

$Q = q' q''$
$N = n'$
$P n_1' \equiv p_1 q_1' n_1' q''$
$P n_m' \equiv p_m q_m' n_m' q''$ } mod. $N = n'$

$z \equiv P y' \pmod{N = n'}$

$y = q'' y'$, wo q'' die kl. pos. Zahl, für welche alle $\frac{n' q' (p_r q_s - q_r p_s)}{n_r q_s - n_s q_r}\, q''$ ganz werden.

Betheiligungs-Erklärung

zur

Deutsch-Westafrikanischen Compagnie.

Berlin SW., Wilhelmstraße 124.

Auf Grund und nach Maßgabe des mir bekannten Statuten der Deutsch-Westafrikanischen Compagnie zeichne ich hierdurch __________ Einlage-Antheil von je 500 Mark und trete hierdurch der gedachten Gesellschaft als Mitglied (stiller Gesellschafter) bei.

Die Deutsch-Westafrikanische Compagnie ist im Handels-Register als stille Handels-Gesellschaft, bei der die Antheilschein-Inhaber nur mit dem eingezahlten Kapital haftbar sind, eingetragen; ich übernehme somit eine weitere Haftung als diejenige für den gezeichneten Betrag nicht, verpflichte mich jedoch diesen Betrag auf Erfordern des geschäftsführenden Vorstandes der Deutsch-Westafrikanischen Compagnie in folgenden Raten:

Mark	am
"	"
"	"
"	"

an die Deutsche Bank baar einzuzahlen.

__________ den __________ 188

[illegible]

$\mu' = \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2 + \cdots + \gamma_m \beta_m + \gamma_{m+1} \beta_{m+1}$

[illegible]

$(\mathfrak{k}, m') = a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{m,m} = (\mathfrak{k}, m)$

[illegible]

$(\mathfrak{k}', m') = a_{m+1,m+1}\, \mu_{m+1}$

$a_1 + a_2\omega - \frac{a_2}{p_2}(p_1 + p_2\omega) =$

$a_1 - \frac{a_2}{p_2} p_1$

$[p_1 + q_1\omega,\ p_2 + q_2\omega \cdots p_n + q_n\omega]$

$= [m,\ p + q\omega]$

$p_r + q_r\omega = \alpha_r m + \beta_r (p + q\omega)$

$m = \sum \mu_r (p_r + q_r\omega)$

$p + q\omega = \sum \delta_r (p_r + q_r\omega)$

$p_r = \alpha_r m + \beta_r p\ ;\ q_r = \beta_r q$

$m = \sum \mu_r p_r\ ;\ 0 = \sum \mu_r q_r$

$p = \sum \delta_r p_r\ ;\ q = \sum \delta_r q_r$

$m = \sum \mu_r (\alpha_r m + \beta_r p) = m \sum \alpha_r \mu_r + p \sum \beta_r \mu_r$

$0 = \sum \mu_r \beta_r q = q \sum \beta_r \mu_r$

$p = \sum \delta_r (\alpha_r m + \beta_r p) = m \sum \alpha_r \delta_r + p \sum \beta_r \delta_r$

$q = \sum \delta_r \beta_r q = q \sum \beta_r \delta_r$

Also

$\sum \beta_r \mu_r = 0\ ;\ \sum \beta_r \delta_r = 1$

$\sum \alpha_r \mu_r = 1\ ;\ \sum \alpha_r \delta_r = 0$

Also

$q = [q_1, q_2 \cdots q_n]$

$p_r q_s - q_r p_s = (\alpha_r m + \beta_r p)\beta_s q - (\alpha_s m + \beta_s p)\beta_r q$

$= (\alpha_r \beta_s - \beta_r \alpha_s)\, mq$

[illegible]

$\sum (p_r q_s - q_r p_s)(\mu_r \delta_s - \delta_r \mu_s) = mq$

Also

$mq = [p_1 q_2 - q_1 p_2 \cdots p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n]$

[illegible]

$a = [a,\ a_1 + a_2\omega]\ ;\ b = [b,\ b_1 + b_2\omega]$

[illegible]

$c = a + b = [p,\ p_1 + p_2\omega]$ [illegible]

$\tau = a - b = [q,\ q_1 + q_2\omega]$

$[p,\ p_1 + p_2\omega] = [a,\ b,\ a_1 + a_2\omega,\ b_1 + b_2\omega]$

$\begin{matrix} a & b & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{matrix}$

[illegible]

$[illegible] : a a_2,\ a b_2,\ b a_2,\ b b_2,\ a_1 b_2 - b_1 a_2$

$ax + by + (a_1 + a_2\omega)x' + (b_1 + b_2\omega)y'$

$= ax + by + a_1 x' + b_1 y' + (a_2 x' + b_2 y')\omega$

$p_2 = \alpha a_2 + \beta b_2$ [illegible] a_2, b_2

$a_2 x' + b_2 y' = p_2 z' = \alpha a_2 z' + \beta b_2 z'$

$(x' - \alpha z') a_2 = (\beta z' - y') b_2 = \frac{a_2 b_2}{p_2} z$

$x' = \frac{b_2}{p_2} z + \alpha z'\ ,\ y' = -\frac{a_2}{p_2} z + \beta z'$

Also

$ax + by + a_1\left(\frac{b_2}{p_2} z + \alpha z'\right) + b_1\left(-\frac{a_2}{p_2} z + \beta z'\right) + p_2 z'\omega$

$= ax + by + \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{p_2} z + (a_1\alpha + b_1\beta + p_2\omega) z'$

Also

$[p_2] = [a_2,\ b_2]\ ;\ [p] = \left[a,\ b,\ \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{p_2}\right]$

$p_1 = a_1\alpha + b_1\beta$

$a_2 p_1 = a_1 (p_2 - \beta b_2) + b_1 a_2 \beta = a_1 p_2 - \beta(a_1 b_2 - b_1 a_2)$

$\frac{a_2}{p_2} p_1 = a_1 - \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{p_2}\beta \equiv a_1 \left(\mathrm{mod.}\ \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{p_2}\right)$

$\frac{b_2}{p_2} p_1 = [illegible] + b_1\left(1 - \frac{[illegible]}{p_2}\right) = b_1 + \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{p_2}\alpha \equiv b_1$ [illegible]

Also Resultat [illegible] $p_2,\ p,\ p_1$:

$[p_2] = [a_2,\ b_2]$

$[p] = \left[a,\ b,\ \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{p_2}\right]$

$\frac{a_2}{p_2} p_1 \equiv a_1\ ,\ \frac{b_2}{p_2} p_1 \equiv b_1\ (\mathrm{mod.}\ p)$

$a = \frac{a}{p} \cdot p + 0 \cdot (p_1 + p_2\omega)$

$a_1 + a_2\omega = \frac{a_1 p_2 - a_2 p_1}{p p_2} \cdot p + \frac{a_2}{p_2}(p_1 + p_2\omega)$

$(c', a) = \frac{a a_2}{p p_2}\ ;\ (c', b) = \frac{b b_2}{p p_2}$

$\sum (\alpha_r \beta_s - \beta_r \alpha_s)(\mu_r \delta_s - \delta_r \mu_s)$ [illegible]

$= \frac{1}{2} \sum (\alpha_r \beta_s - \beta_r \alpha_s)(\mu_r \delta_s - \delta_r \mu_s)$ [illegible]

$= \frac{1}{2} \sum \alpha_r \mu_r \beta_s \delta_s + \frac{1}{2} \sum \alpha_s \mu_s \beta_r \delta_r$

$+ \frac{1}{2} \sum \alpha_r \delta_r \beta_s \mu_s - \frac{1}{2} \sum \alpha_s \delta_s \beta_r \mu_r$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 - 0 = 1$

[illegible] $q_s p = \sum \delta_r p_r q_s$

$= \sum \delta_r (p_r q_s - q_r p_s + q_r p_s) \equiv p_s \sum \delta_r q_r\ (\mathrm{mod.}\ mq)$

$q_s p \equiv q p_s\ (\mathrm{mod.}\ mq)$

$\frac{q_s}{q} p \equiv p_s\ (\mathrm{mod.}\ m)$

begeben sind. Ausser dem bisher für Löhne, Gehälter, Expeditionskosten u. s. w. verausgabten Betrage von ca. 60,000 Mark, sowie den Rest-Guthaben auf Antheilscheine und dem vorhandenen Baarbestande setzt sich der Besitzstand der Compagnie wie folgt zusammen:

Waarenlager in Afrika per 1. April incl. Transport und Landen	Mk.	79,967 37
Schlächterei-Utensilien, Maschinen, Fässer und Materialien loco Sandwichhafen	„	30,021 62
Gebäude incl. Transport und Aufbau	„	36,102 07
Brigg „Adolph" Ankauf	„	10,500 —
7 Transportwagen, Ausrüstung, 6 Pferde, 100 Zugochsen	„	14,785 22
Mobilien und Utensilien in Afrika und Berlin	„	2,885 53
Produkte	„	370 30
Baumaterialien aus Capstadt incl. Fracht und Landen	„	7,200 —
Waarensendung nach Afrika unterwegs	„	15,682 60
	Mk.	197,464 71

Die Unternehmungen der Deutsch-Westafrikanischen Compagnie sind rein kaufmännischer Natur und deshalb nicht mit denen von Kolonisations-Gesellschaften zu verwechseln, welche die Erwerbung von Ländereien und den Betrieb von Plantagen, die vielleicht erst nach Jahren einen Gewinn abwerfen, zum Zwecke haben.

Der Handel sowie die Exportschlächterei versprechen, besonders da die Letztere bereits in Betrieb gesetzt ist, binnen Kurzem gute Erträgnisse, sobald die Compagnie voraussichtlich in der Lage sein wird, gleich den englischen colonialen Handelsgesellschaften bald einen beträchtlichen Gewinn zu erzielen, um so mehr, als das Betriebs-Capital entsprechend niedrig ist, und keine grossen Summen in Ländereien etc. todt anzulegen sind. Die kaufmännische Leitung in Europa ist in die Hände zweier Kaufleute gelegt, die durch langjährige Thätigkeit im In- und Auslande in den verschiedenen Geschäftszweigen reiche Erfahrungen gesammelt haben, während in Afrika der frühere deutsche Consul für Süd-West-Afrika Herr Heinr. Vogelsang, welcher s. Z. im Auftrage der Firma F. A. E. Lüderitz die ersten Verträge mit den Eingeborenen dort abschloss und dadurch dieses Gebiet dem deutschen Reiche erwarb, die Geschäfte leiten wird.

Anträge wegen Erwerbung von Antheilscheinen sind an das Bureau der Compagnie, Berlin S.W., Wilhelmstrasse 124 zu richten und kann die Abnahme gegen Einsendung des Betrages jederzeit geschehen. Einzahlungen für die Compagnie sind an die Deutsche Bank, Berlin, oder deren Filialen zu leisten. Nach § 3 der Statuten kann jedoch auch der Betrag in folgenden Raten bezahlt werden:

Ein Fünftel sofort
Ein Fünftel 3 Monate später
Ein Fünftel 6 „ „
Ein Fünftel 9 „ „
Ein Fünftel 12 „ „

Bis zur Einzahlung des vollen Betrages werden Interims-Quittungen ausgestellt, welche nach vollständiger Bezahlung gegen die Antheilscheine kostenfrei umgetauscht werden.

Statuten werden auf Wunsch von dem Bureau der Compagnie zugesandt.

Berlin, 15. September 1886.

Der Vorstand
der
Deutsch-Westafrikanischen Compagnie.