# Zweigliedrige verwandte Moduln

### Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

4 Fichier(s)

ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

## Présentation

TitreZweigliedrige verwandte Moduln
Date1888-189x
Sujet

- congruences
- meilleure présentation
- modules
- modules finis
- trois modules

CoteCod. Ms. Dedekind X 10, p. 20-21
Format1 f. ; 2p.
LangueAllemand

## Description & Analyse

DescriptionPremière page, calculs sur modules finis générés par 2 éléments. Deuxième page : ancienne notation, application de la théorie générale des trois modules à des modules générés par 2 éléments.
Mode(s) d'écriture

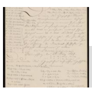
- Aufgaben
- Calculs

Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

## Relations

**Collection Cod. Ms. Dedekind X 10**

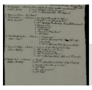
*Ce document a les mêmes calculs que :*



Calculs sur des modules finis 14

**Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1**

*Ce document utilise la même notation que :*


Meilleure présentation pour 3 modules a, b, c

Afficher la visualisation des relations de la notice.

## Mots-clefs

congruences, meilleure-presentation, modules, modules finis, trois modules

Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 17/01/2019 Dernière modification le 21/07/2021

Zweigliedrige verwandte Moduln

[illegible] ; [illegible] rationalen Zahlen

$[p_1+q_1\omega, p_2+q_2\omega \ldots p_n+q_n\omega] = [a, b+c\omega]$ . Um $a, b, c$ aus den $p, q$ zu finden, [illegible]

$[q_1, q_2 \ldots q_n] = [c]$ , also $q_1 = g_1 c, q_2 = g_2 c \ldots q_n = g_n c$ ; $c = g_1' q_1 + g_2' q_2 + \ldots + g_n' q_n$ ,

$g_1 g_1' + g_2 g_2' + \ldots + g_n g_n' = 1$ , wo alle $g$ ganz

$b = g_1' p_1 + g_2' p_2 + \ldots + g_n' p_n$

Man kann nun $b+c\omega$ zu den [illegible] $p_r + q_r\omega$ hinzufügen ; da nun

$$p_r + q_r\omega = p_r + g_r c\omega = g_r(b+c\omega) + p_r - g_r b ,$$

so ist unser Modul gleich

$[p_1 - g_1 b, p_2 - g_2 b \ldots p_n - g_n b, b+c\omega] = [a, b+c\omega]$ ,

wo

$[a] = [p_1 - g_1 b, p_2 - g_2 b \ldots p_n - g_n b]$

Um nun $b, a$ [illegible] aus den $p, q$ zu finden, setze man

$p_r q_s - p_s q_r = a_{r,s}$ , und $[a'] = [a_{1,2} \ldots a_{r,s} \ldots a_{n-1,n}]$

so wird

$p_r - g_r b = p_r \sum g_s g_s' - g_r \sum g_s' p_s$ ; $c(p_r - g_r b) = p_r \sum q_s g_s' - q_r \sum g_s' p_s = \sum a_{r,s} g_s' \equiv 0 \pmod{[a']}$

und folglich

$[ac] = [c(p_1 - g_1 b) \ldots c(p_n - g_n b)]$ theilbar durch $[a']$ , und $q_r b \equiv p_r c$ mod. $[a']$

Andererseits ist

$a_{r,s} = c(p_r g_s - p_s g_r) = c\{(p_r - g_r b) g_s - (p_s - g_s b) g_r\} \equiv 0$ mod $[ac]$

folglich auch

$[a']$ theilbar durch $[ac]$

mithin

$[a'] = [ac]$

d. h.

$[ac] = [p_1 q_2 - p_2 q_1 \ldots p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}]$ ; $[c]_1 = [q_1 \ldots q_n]$

wodurch $a$ bestimmt ist ; und $b$ ist mod. $a$ bestimmt durch

$$\frac{q_r}{c} b \equiv p_r \pmod{a}$$

[illegible] , wo alle $a_{r,s} = p_r q_s - p_s q_r$ verschwinden, ist der Modul eingliedrig

$\frac{1}{c_1} \ldots \frac{1}{c_n} \quad \frac{b_1}{a_1 c_1} \ldots \frac{b_n}{a_n c_n}$

$0 \ldots 0 \quad \frac{1}{a_1} \ldots \frac{1}{a_n}$

$\sum \left[\frac{1}{c_r}, \frac{b_r}{a_r c_r} + \frac{\omega}{a_r}\right] = [a, b+c\omega]$

$[c] = \sum \left[\frac{1}{c_r}\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{C}}\right]$ ; $c = \frac{1}{\mathfrak{C}}$ ; $ac = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$

$[ac] = \sum \left[\frac{1}{a_r c_r}, \frac{b_r c_s - b_s c_r}{a_r a_s c_r c_s}\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right]$

$c \cdot b \equiv \frac{1}{c_r}$ ; $\frac{\mathfrak{A}}{a_r} b \equiv \frac{b_r}{a_r c_r} \pmod{\frac{1}{\mathfrak{C}}}$

$b = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$

$(a_r, m) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{a_r c_r}$

$(a_r, m) a_r =$

$\mathfrak{A}\mathfrak{C}\left[\frac{1}{c_r}, \frac{b_r}{a_r c_r} + \frac{\omega}{a_r}\right]$

Also Satz

$m = \sum (a_r, m) a_r$

$m = \mathfrak{M} a_r$

Zweite Aufgabe: Das kl. gem. Vielfache zweier Moduln $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}+\mathfrak{C}\omega]$ $\left[\frac{1}{\mathfrak{A}}\right] = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n}\right]$

$[a_1, b_1 + c_1\omega], [a_2, b_2 + c_2\omega] \ldots [a_n, b_n + c_n\omega]$ $\left[\frac{1}{\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{1}{c_r} \ldots \mathfrak{A}\frac{b_r c_s - b_s c_r}{a_r a_s c_r c_s}\right]$

zu finden. D. h. alle Systeme von ganzen Zahlen ~~[illegible]~~ $x_1, y_1 \ldots x_n, y_n$ zu finden, für welche

$a_1 x_1 + (b_1 + c_1\omega) y_1 = a_2 x_2 + (b_2 + c_2\omega) y_2 = \ldots = a_n x_n + (b_n + c_n\omega) y_n = u + v\omega$

$v = c_1 y_1 = c_2 y_2 = \ldots = c_n y_n$

$u = a_1 x_1 + b_1 y_1 = a_2 x_2 + b_2 y_2 = \ldots = a_n x_n + b_n y_n$

$\left[\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{1}{a_r c_r} \ldots \frac{b_r c_s - b_s c_r}{a_r a_s c_r c_s} \ldots\right]$

$\frac{\mathfrak{A}}{a_r}\mathfrak{B} \equiv \frac{\mathfrak{A}}{a_r}\frac{b_r}{c_r}\mathfrak{C} \pmod{\mathfrak{A}}$

Ist $\mathfrak{C}' = g_1 c_1 = g_2 c_2 = \ldots = g_n c_n$ das kl. gem. Vielfache von $c_1, c_2 \ldots c_n$ , d. h. $[g_1, g_2 \ldots g_n] = [1]$ , also

$\left[\frac{1}{\mathfrak{C}'}\right] = \left[\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2} \ldots \frac{1}{c_n}\right]$

so muss

$v = \mathfrak{C}' y$ ; $y_r = \frac{\mathfrak{C}'}{c_r} y = g_r y$ , wo $y$ ganz

$u = a_1 x_1 + b_1 g_1 y = a_2 x_2 + b_2 g_2 y = \ldots = a_n x_n + b_n g_n y$

Ist ebenso $\mathfrak{A}'$ das kl. gem. Vielfache von $a_1, a_2 \ldots a_n$ , also $\left[\frac{1}{\mathfrak{A}'}\right] = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n}\right]$ , so muss [illegible]

$\frac{b_r g_r - b_s g_s}{a_r a_s} y$ und $\frac{u}{\mathfrak{A}'} \equiv 0 \pmod{\frac{1}{\mathfrak{A}'}}$

$\left[\mathfrak{A}\frac{b_r g_r - b_s g_s}{a_r a_s} \ldots, 1\right] y$ theilbar durch $[1]$

Man setze $\left[\mathfrak{A}\frac{b_r g_r - b_s g_s}{a_r a_s} \ldots, 1\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{A}'}\right]$ , so ist $\mathfrak{A}'$ ganz

und $y = \mathfrak{A}' z$ , $z$ ganz

$\frac{u}{a_1} \equiv \frac{b_1 g_1}{a_1} y$

$\ldots$

$\frac{u}{a_n} \equiv \frac{b_n g_n}{a_n} y$

$v = y$

mod. $[1]$

$\frac{u}{\mathfrak{A}} \equiv \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} z \pmod{1}$

$u = \mathfrak{A} w + \mathfrak{B} z$ , $v = \mathfrak{C}\mathfrak{A}' z$

$\frac{\mathfrak{B}}{a_r} \equiv \frac{b_r g_r}{a_r}\mathfrak{A}' \pmod{1}$ ; $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}'$

T. STURM
…RHEINGAU
…RÜDESHEIM

Rüdesheim a/Rhein, 15. September 1888.

P. P.

Die Aussichten auf die diesjährige Lese haben im Laufe des Jahres aussergewöhnlich stark
schwankt. Die Weinstöcke waren infolge des strengen Nachwinters anfangs sehr im Rückstande,
tten aber eine grosse Fülle von Gescheinen angesetzt. Das schöne Wetter, welches sich im Monat Juni
nstellte, hat die späte Entwickelung alsbald ausgeglichen und theilweise einen sehr guten und schnellen
rlauf der Blüthe bewirkt. Nur die weniger warmen Lagen, in denen die Reben bei Eintritt des
gewitters anfangs Juli noch im Blühen waren, haben einen starken Ausfall erlitten. Das hierauf
lgende, ungewöhnlich kühle und nasse Wetter, welches den ganzen Juli hindurch andauerte und auch im
nat August vorherrschend blieb, hat dem Weinstock im Allgemeinen nicht so viel geschadet, als be-
rchtet wurde. Namentlich in hiesiger Gemarkung und in anderen, ähnlich bevorzugten Lagen, in denen
immer noch verhältnissmässig warm blieb, hat sich der Fruchtansatz sehr gut entwickelt, sodass hier
n ziemlich reicher Ertrag zu erwarten steht. Leider sind indessen die Trauben hinsichtlich der Reife
ch sehr zurück; doch kann dies bis zur Lesezeit (Ende Oktober) wieder einigermassen eingeholt werden,
fern sich die Witterung bis dahin entsprechend warm und sonnig gestaltet.

Die Preise der angebogenen Liste habe ich unverändert gelassen, denn wenn auch im Allgemeinen
e Bestände, infolge mehrfacher unzureichender Ernten in den letzten Jahren, recht knapp sind, so hatte
h doch durch rechtzeitig gemachte, umfangreiche Einlagen — in Ergänzung des Ertrages meiner eigenen
sgedehnten Besitzungen — hiergegen Vorsorge getroffen. Besonders reiche Vorräthe habe ich von den
ten 1886r und 1884r Gewächsen, ferner von den Jahrgängen 1883, 1881, 1880 u. s. w., wie aus der
eisliste näher ersichtlich.

Es lasten auf meinen Notirungen keine Verkaufsspesen, da ich weder reisen lasse, noch Agenten
schäftige, sondern die dadurch erzielten Ersparnisse meinen Kunden in der Form billigerer Preise, bezw.
ssere Qualitäten zugute kommen lasse.

Hochachtungsvoll

*Joh. Bapt. Sturm.*

# Joh. Bapt. Sturm, Rüdesheim a. Rh.

## Weinbergsgut in Rüdesheim Assmannshausen & Johan

**HERBST 1888**

## Weisser Wein

| | Per 100 Liter ohne Fass | Per Flasche mit Glas und Packung |
|---|---|---|
| | Mark | Mark |
| Rheinwein Nr. I. angenehmer Tischwein | 60 | 0.80 |
| do. Nr. II kräftig und blumig | 80 | 0.95 |
| **Eigenes Gewächs:** | | |
| Rüdesheimer Nr. III. | 100 | 1.15 |
| do. Bischofsberg Nr. IV. | 140 | 1.50 |
| do. do. I. Qual. Nr. V. | 180 | 1.85 |
| do. Berg Nr. VI. | 240 | 2.40 |
| do. Rosengarten | 300 | 3.— |
| do. Rottland | 300 | 3.— |
| do. Hinterhaus | 375 | 3.50 |
| do. Berg Riesling | 420 | 4.— |
| do. Rosengarten Auslese | 480 | 4.50 |
| do. Rottland Auslese | 540 | 5.— |
| do. Berg Orleans Auslese | — | 5.— |
| do. Berg Auslese elegant, milde, feines Bouquet | — | 6.— |
| do. Berg Auslese voll, edel und bouquetreich | — | 6.— |
| do. Hinterhaus Auslese | — | 7.50 |

## Rother Wein

| | | |
|---|---|---|
| Ingelheimer selbst gekeltert | 100 | 1.15 |
| Assmannshäuser do. do. | 140 | 1.50 |
| do. Auslese Eigenes Gewächs | 200 | 2.— |
| do. Hinterkirch do. do. | 300 | 3.— |
| do. do. Auslese do. do. «Blume von Assmannshausen» | — | 4.— |

| Jahrgänge | Weisser Wein |
|---|---|
| 1884r | Oestricher |
| 1884r oder 83r | Geisenheimer |
| 1884r oder 83r | Rauenthaler |
| 1878r | Winkeler Hasensprung |
| 1884r | Scharlachberger |
| 1884r | Johannisberger Eigenes Gewächs |
| 1884r | Marcobrunner |
| 1884r | Hochheimer Domdechanei |
| 1884r | Geisenheimer Rothenberg |
| 1876r | Schloss Vollradser |
| 1875r | Rauenthaler Berg |
| 1875r | Schloss Johannisberger |
| 1883r | Rauenthaler Berg Auslese |
| 1874r | Steinberger Cabinet feinste Auslese |
| 1874r | Marcobrunner Auslese |
| 1868r | Schloss Johannisberger Cabinet |

## Moselwein

| Jahrgänge | |
|---|---|
| 1886r | Enkircher |
| 1884r | Drohner oder Graacher |
| 1884r | Zeltinger oder Piesporter |
| 1884r | Brauneberger |
| 1884r oder 81r | Zeltinger Schlossberg |
| 1884r | Grünhäuser |
| 1884r | Josephshöfer |

## Deutscher Schaumwein

a) In der Art des französischen Champagner

| | | Per Flasche mit Glas und Packung |
|---|---|---|
| Sekt Rheinwein | (nach Wunsch herb oder milde) | Mark 2.25 |
| » Rüdesheimer | (halbmilde) | » 3.— |
| » Champagne | (milde) | » 4.— |
| » Cabinet | (herb) | » 4.50 |

b) Im Character der rheinischen Rieslingsweine

Sekt Rüdesheimer Riesling

c) Roth

Sekt Ingelheimer

» Assmannshäuser

… werden zu nachstehenden Selbstkosten-Preisen berechnet. Ein Fass von 100 Liter ergibt ca. 125—130 gewöhnliche …
In halben Flaschen 25 Pf. (bei Schaumwein 50 Pf.) mehr für 2 halbe Flaschen.

**Preise der amtlich geaichten Weinfässer**

| Inhalt ca. | 300 Liter (½ Stück) | 200 Liter | 150 Liter (½ Ohm) | 100 Liter | 75 Liter (½ Ohm) | 50 Liter |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Preis | M. 14.— | M. 11.— | M. 9.— | M. 6.50 | M. 5.50 | M. 4.— |

**Die Preise verstehen sich ab Rüdesheim, zahlbar nach Empfang ohne Sconto.**

Druck von [illegible], Frankfurt a. M.

Alte Bezeichnung.

Anwendung der allgemeinen Theorie der drei Moduln auf verwandte zweigliedrige Moduln. Für diese gilt allgemein der Satz

$$\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_3 - \cdots - \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m} = \sum (\mathfrak{m}_r, \mathfrak{m})\,\mathfrak{m}_r$$

$(\mathfrak{a}''', \mathfrak{a}^0) = \mathfrak{a}$

$(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}^0) = \mathfrak{b}$

$\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}''' + \mathfrak{b}\mathfrak{m}'$

$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

$\mathfrak{m} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{m})\mathfrak{a} + (\mathfrak{b}, \mathfrak{m})\mathfrak{b} + (\mathfrak{c}, \mathfrak{m})\mathfrak{c} = hab_1c_1\mathfrak{a} + hbc_1a_1\mathfrak{b} + hca_1b_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ ; $\mathfrak{b}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ ; $\mathfrak{c}'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$

$\mathfrak{m}' = bc(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + ca(\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) + ab(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = aa'\mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}[a'] = [b, c]$ etc.

$\mathfrak{a}_1 = hbc_1\mathfrak{b} + hcb_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}_1 = hca_1\mathfrak{c} + hac_1\mathfrak{a}$

$\mathfrak{c}_1 = hab_1\mathfrak{a} + hba_1\mathfrak{b}$

$\mathfrak{d}_1 = haa_1'\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}_1[a_1'] = [b_1, c_1]$

$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}'' = aa'\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}'' = aa'\mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}_2 = ha\mathfrak{a} + hba_1b_1'\mathfrak{b} + hca_1c_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}_2 = hab_1a_1'\mathfrak{a} + hb\mathfrak{b} + hcb_1c_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}_2 = hac_1a_1'\mathfrak{a} + hbc_1b_1'\mathfrak{b} + hc\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}''' = haa_1'\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}''' = haa_1'\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}_3 = a\mathfrak{a} + hbb'a_1\mathfrak{b} + hcc'a_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}_3 = haa'b_1\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + hcc'b_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}_3 = haa'c_1\mathfrak{a} + hbb'c_1\mathfrak{b} + c\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}^0 = a\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$ $< h\mathfrak{b}$ $a\mathfrak{a} + hbb'\mathfrak{b} + hcc'\mathfrak{c}$ ?

$\mathfrak{b}^0 = haa_1'\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}^0 = haa_1'\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + c\mathfrak{c}$

21

Zweigliedrige Moduln

$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$

$\mathfrak{b} = [h\alpha_1, i\alpha_1 + k\alpha_2]$

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} =$

$[i, k] = [k']$ ; $i = mk'$ , $k = nk'$

$mm' + nn' = 1$ ; $n' \equiv 0 \pmod{i}$

$m' + n'k = k'$ ; $n'k \equiv k' \pmod{i}$

$m'\alpha_2 + n'(i'\alpha_1 + k\alpha_2) = n'i\alpha_1 + k'\alpha_2$

$\alpha_2 - m(n'i\alpha_1 + k'\alpha_2) = -mn'i\alpha_1$

$(i\alpha_1 + k\alpha_2) - n(n'i\alpha_1 + k'\alpha_2) = mm'i\alpha_1$

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = [\alpha_1, h\alpha_1, \frac{i}{k'}\alpha_1, n'i\alpha_1 + k'\alpha_2] = [h'\alpha_1, i'\alpha_1 + k'\alpha_2]$

$[k'] = [i, k]$ ; $i' = im'$ ; $kn' = k'$

$[h'] = [1, h, \frac{i}{k'}]$ ; $[kh'] = [i, h, k, hk, i]$

$1, i, k, -i, -i, hk$

$1, 0$

$0, 1$

$k, 0$

$i, k$

$$\frac{i}{k'} - \frac{kn'}{k'} \equiv 0 \pmod{\frac{i}{k'}}$$

$$\equiv \frac{ik'}{kk'} \pmod{\frac{i}{k}}$$