

Verwandtschaft der Moduln

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

2 Fichier(s)

Contributeur·rices Haffner, Emmylou
Éditeurs Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS)
; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN
(Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

Titre Verwandtschaft der Moduln

Date 189x

Sujet

- idéaux
- modules
- nombres de classes
- Stufen
- théorie des nombres
- Treppen

Cote Cod. Ms. Dedekind X 11-2, p. 11

Format 1 p. ; 2 f.

Langue Allemand

Description & Analyse

Description Étude de la "*Verwandtschaft*" et des "familles" de modules telles que définis dans les *Vorlesungen* de Dirichlet (référence à édition de 1871, p. 490). Calcul de "distances" entre modules (ie nombres de "marches" dans "l'escalier") et organisation de ces distances dans un tableau.

Mode(s) d'écriture

- Tableau
- Texte rédigé

Auteur·es de la description Haffner, Emmylou

Mots-clefs

[idéaux](#), [modules](#), [nombres de classes](#), [Stufen](#), [théorie des nombres](#), [Treppen](#)

Notice créée par [Emmylou Haffner](#) Notice créée le 19/07/2021 Dernière modification le 19/07/2021



Verwandtschaft der Moduln

Zwei Moduln heißen verwandt (Frischlet Zahlentheorie, Aufl. 2, S. 490), wenn keine der Zahlen (a, b) , (b, a) verschwindet. Demgemäß der Satz: Sind zwei Moduln α, β mit einem dritten γ verwandt, so sind sie auch mit einander verwandt. - Der Beweis folgt unmittelbar aus II (oder II'), weil jedes die vier Factoren

$$(\alpha, \alpha''), (\alpha'', \beta), (\beta, \beta'''), (\alpha'', \alpha)$$

$$(\alpha, \tau), (\tau, \beta), (\beta, \tau), (\tau, \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 (b, \tau)(\tau, \alpha) &= (b, a)(\tau, \tau)(\tau, \alpha) \\
 (\tau, \tau)(\tau, \beta) &= (b, \beta)(\tau, \tau)(\tau, \alpha) \\
 &\text{oder auch} \\
 (\tau, \tau)(\tau, \alpha) &= (b, a)(\tau, \tau)(\tau, \alpha) \\
 (\tau, \tau)(\tau, \beta) &= (b, \beta)(\tau, \tau)(\tau, \alpha) \\
 &\text{oder auch} \\
 (b, \tau)(\tau, \alpha) &= (b, \beta)(\tau, \tau)(\tau, \alpha) \\
 (\tau, \tau)(\tau, \beta) &= (b, \beta)(\tau, \tau)(\tau, \alpha)
 \end{aligned}$$

mit denen (a, b) , (b, a) gebildet sind, resp. Factoren von (α, τ) , (τ, β) , (β, τ) , (τ, α) sind und folglich nicht verschwinden.

Alle Moduln können in Familien eingetheilt werden in der Weise, dass je zwei Moduln in derselben oder in verschiedenen Familien gehören, je nachdem sie verwandt sind oder nicht. Jedes Glied einer Familie, d. h. jede in ihr enthaltene Modul, kann als ihr Representant angesehen werden.

Der größte gemeinsame Theil und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Moduln derselben Familie gehört derselben Familie an, wie $(a, b) = \alpha \beta$, $\alpha \gamma$, $(a, a-b)$, und $(a, \alpha \beta) = (a-b, \alpha) = \gamma$ ist, jede Familie ist daher auch eine Gruppe von Moduln. - Siehe die folgende Seite!

Sind α, β, γ Ideale eines endlichen Körpers, so gilt dasselbe von allen anderen Moduln der Gruppe, da man für beliebige Ideale β_0, τ_0 der Satz $(\beta_0 + \tau_0)(\beta_0 - \tau_0) = \beta_0 \tau_0$ gilt, so wird, weil $\beta_0 + \tau_0 = \delta'$, $\beta_0 - \tau_0 = \delta''$ ist, $\delta' \delta'' = \beta_0 \tau_0 = \alpha_0 \beta_0$, mit ein $\alpha_0 \beta_0 = \tau_0 = \delta''$, mithin

$$\alpha_0 = \beta_0 = \tau_0 = \delta' = \delta''$$

$$\alpha'' = \alpha', \beta'' = \beta', \tau'' = \tau', \alpha_2 = \alpha_1, \beta_2 = \beta_1, \tau_2 = \tau_1$$

und folglich schrumpft die Gruppe von 28 Moduln auf eine von 18 Moduln an, welche im Allgemeinen verschieden sind. Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= [48], \beta = [30], \tau = [20] & \alpha''' &= [1], \beta_0 = [1260] \\
 \alpha'' &= [2], \beta'' = [3], \tau'' = [5] & \alpha' \beta \tau &= \delta' \delta'' = [30] \\
 \alpha_2 &= [420], \beta_2 = [630], \tau_2 = [180] \\
 \alpha' \alpha' &= [15], \beta' \beta' = [10], \tau' \tau' = [6] \\
 \alpha_1 \alpha_1 &= [90], \beta_1 \beta_1 = [60], \tau_1 \tau_1 = [10]
 \end{aligned}$$

Allgemein: ist

$$[\beta, \tau] + [\tau, \alpha] = [\alpha, \beta] = [\alpha, \alpha'] = [\beta, \beta'] = [\tau, \tau'] = [\alpha', \alpha'] = [\beta', \beta'] = [\tau', \tau'] = [\alpha_1, \alpha_1] = [\beta_1, \beta_1] = [\tau_1, \tau_1] = [9]$$

und setzt man

$$\begin{aligned}
 \alpha &= [4ca,] & \beta &= [cab,] & \tau &= [abc,] \\
 \alpha''' &= [a] & \beta''' &= [b] & \tau''' &= [c] \\
 \alpha_2 &= [abab, c,] & \beta_2 &= [abca, a,] & \tau_2 &= [abca, b,] \\
 \alpha'' &= \alpha' = [bc] & \beta'' &= \beta' = [ca] & \tau'' &= \tau' = [ab] \\
 \alpha_1 &= \alpha_0 = [abca, \tau] & \beta_1 &= \beta_0 = [abc, \beta,] & \tau_1 &= \tau_0 = [abc, c,] \\
 \delta''' &= [1], \delta'' &= \delta' = \tau_0 = \beta_0 = \alpha_0 &= [abc], \delta_2 &= [abca, b, c,]
 \end{aligned}$$

Im obigen Beispiel ist $\alpha = 2, \beta = 3, \tau = 5$
 $\alpha_1 = 3, \beta_1 = 2, \tau_1 = 7$

Abstände von je zwei Modulen, d. h. kleinste Zahl der einfachen Schritte von einem zum andern!

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

| Abstand | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Summe | 406 = 17*19 | | | | | | | |

Der Zusammenhang der Module (orig. Seite): Sei $(a+b, a-b) = (a+b, b)(b, a-b)$ ist, so kann die Determinante von a, b durch $(a+b, a-b) > 0$ definiert werden. Nun ist offenbar $a'' = a + b, a' = a - b, c'' = c + d, c' = c - d$, mithin $(a'', a') = (a+b, a-b) = (a+b, b)(b, a-b)$, und $(c'', c') = (c+d, c-d) = (c+d, d)(d, c-d)$, mithin $(a'', a') = (a''', a''') (c'', c') = (a''', a''') (c''', c''')$, hierin keine Vertauschung $(a'', a') = (a''', a''') (c'', c') = (a''', a''') (c''', c''')$ also $(a''', a''') (c''', c''') = (a'', a'') (c'', c'') = (a'', a'') (c''', c''')$.
 Das $(a'', a') > 0$ und $(c'', c') > 0$ folgt daher auch $(a''', a''') > 0$, u. d. G. G.
 So kann $a'' < a' < a_2 < a_3$, so wie $(a''', a''') < (a''', a''') < (a''', a''')$,
 mithin $(a''', a''') (c''', c''') = (a''', a''') (c''', c''')$.