Verwandtschaft der Moduln

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

2 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreVerwandtschaft der Moduln
Date 189x
Sujet

- idéaux
- modules
- nombres de classes
- Stufen
- théorie des nombres
- Treppen

CoteCod. Ms. Dedekind X 11-2, p. 11
Format1 p. ; 2 f.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionÉtude de la "*Verwandschafdt*" et des "familles" de modules telles que définis dans les *Vorlesungen* de Dirichlet (référence à édition de 1871, p. 490). Calcul de "distances" entre modules (ie nombres de "marches" dans "l'escalier") et organisation de ces distances dans un tableau.
Mode(s) d'écriture

- Tableau
- Texte rédigé

Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Mots-clefs

idéaux, modules, nombres de classes, Stufen, théorie des nombres, Treppen
Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 19/07/2021 Dernière modification le 19/07/2021

Verwandtschaft der Moduln

Zwei Moduln a, b heissen verwandt (Dirichlet Zahlentheorie Aufl. 2, S. 490), wenn keine der Zahlen (a, b), (b, a) verschwindet. Dann gilt der Satz: Sind zwei Moduln a, b mit einem dritten c verwandt, so sind sie auch mit einander verwandt. – Der Beweis folgt unmittelbar aus IV oder II, weil jeder der vier Factoren

$$(a, a'''),\ (b', b),\ (b, b'''),\ (a'', a)$$

aus denen (a, b), (b, a) gebildet sind, resp. Factoren von

$$(a, c),\ (c, b),\ (b, c),\ (c, a)$$

sind und folglich nicht verschwinden.

$(b,c)(c,a) = (b,a)(c'',c)(c,c''')$
$(a,c)(c,b) = (a,b)(c'',c)(c,c''')$
oder auch
$(b,c)(c,a) = (b,a)(c'', c+c''')$
$(a,c)(c,b) = (a,b)(c'', c-c''')$
oder auch
$(b,c)(c,a) = (b,a)(c'',c_1) = (b,a)(c', c_2)$
$(a,c)(c,b) = (a,b)(c'',c_1) = (a,b)(c', c_2)$

Alle Moduln können in Familien eingetheilt werden in der Weise, dass je zwei Moduln in dieselbe oder in verschiedene Familien gehören, je nachdem sie verwandt sind oder nicht. Jedes Glied einer Familie, d. h. jeder in ihr enthaltene Modul, kann als ihr Repräsentant angesehen werden.

Der grösste gemeinsame Theiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von je zwei Gliedern einer Familie gehört derselben Familie an, weil $(a, b) = (a+b, a) = (a, a-b)$, und $(a, a+b) = (a-b, a) = 1$ ist. Jede Familie ist daher auch eine Gruppe von Moduln. – Siehe die folgende Seite!

Sind a, b, c Ideale eines endlichen Körpers, so gilt dasselbe von allen anderen Moduln der Gruppe; da nun für beliebige Ideale b_0, c_0 der Satz $(b_0+c_0)(b_0-c_0) = b_0 c_0$ gilt, so wird, weil $b_0+c_0 = d'$, $b_0-c_0 = d_1$ ist, $d'd_1 = b_0c_0 = c_0a_0 = a_0b_0$, mithin ~~$a_0 = b_0 = c_0 = d' = d_1$, mithin~~

$$a_0 = b_0 = c_0 = d' = d_1, \quad \text{also } h = 1, \quad \text{also auch}$$

$$a'' = a',\ b'' = b',\ c'' = c',\ a_2 = a_1,\ b_2 = b_1,\ c_2 = c_1$$

und folglich schrumpft die Gruppe von 28 Moduln auf eine von 18 Moduln ein, welche im Allgemeinen verschieden sind. Beispiel:

$a = [45]$; $b = [30]$; $c = [42]$ $\qquad d''' = [1]$, $d_4 = [1260]$
$a''' = [2]$, $b''' = [3]$, $c''' = [5]$ $\qquad a^0 = b^0 = c^0 = d' = d_1 = [30]$
$a_3 = [420]$, $b_3 = [630]$, $c_3 = [180]$
$a'' = a' = [15]$, $b'' = b' = [10]$, $c'' = c' = [6]$
$a_2 = a_1 = [90]$, $b_2 = b_1 = [60]$, $c_2 = c_1 = [210]$

Allgemein: ist
$[b, c] = [c, a] = [a, b] = [a, a_1^*] = [b, b_1^*] = [c, c_1^*] = [b_1^*, c_1^*] = [c_1^*, a_1^*] = [a_1^*, b_1^*] = [1]$
und setzt man

$$a = [bca_1], \quad b = [cab_1], \quad c = [abc_1],$$

so wird

$a''' = [a]$, $b''' = [b]$, $c''' = [c]$
$a_3 = [abcb_1c_1]$, $b_3 = [abca_1c_1]$, $c_3 = [abca_1b_1]$
$a'' = a' = [bc]$, $b'' = b' = [ca]$, $c'' = c' = [ab]$
$a_2 = a_1 = [abca_1]$, $b_2 = b_1 = [abcb_1]$, $c_2 = c_1 = [abcc_1]$
$d''' = [1]$, $a^0 = b^0 = c^0 = d' = d_1 = [abc]$, $d_4 = [abca_1b_1c_1]$

Im obigen Beispiel ist $\begin{cases} a = 2,\ b = 3,\ c = 5 \\ a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ c_1 = 7 \end{cases}$

Abstände von je zwei Moduln, d. h. kleinste Zahl der einfachen Schritte von einem zum andern.

	ϑ'''	a'''	b'''	c'''	a''	b''	c''	ϑ''	a'	b'	c'	a	b	c	a_2	b_2	c_2	ϑ_1	a_1	b_1	c_1	a_3	b_3	c_3	a_4	b_4	c_4	ϑ_4
ϑ'''	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
a'''	1	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
b'''	1	2	0																									
c'''	1	2	2	0																								
a''	2	2	1	1	0																							
b''	2	1	3	1	2	0																						
c''	2	1	1	3	2	2	0																					
ϑ''	3	2	2	2	1	1	1	0																				
a'	3	4	2	2	1	3	3	2	0																			
b'	3	2	4	2	3	1	3	2	4	0																		
c'	3	2	2	4	3	3	1	2	4	4	0																	
a	4	5	3	3	2	4	4	3	1	5	5	0																
b	4	3	5	3	4	2	4	3	5	1	5	6	0															
c	4	3	3	5	4	4	2	3	5	5	1	6	6	0														
a_2	4	3	3	3	2	2	2	1	1	3	3	2	4	4	0													
b_2	4	3	3	3	2	2	2	1	3	1	3	4	2	4	2	0												
c_2	4	3	3	3	2	2	2	1	3	3	1	4	4	2	2	2	0											
ϑ_1	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	0										
a_1	5	4	4	4	3	3	3	2	2	4	4	1	5	5	1	3	3	2	0									
b_1	5	4	4	4	3	3	3	2	4	2	4	5	1	5	3	1	3	2	4	0								
c_1	5	4	4	4	3	3	3	2	4	4	2	5	5	1	3	3	1	2	4	4	0							
a_3	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	3	2	4	4	2	2	2	1	1	3	3	0						
b_3	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	3	4	2	4	2	2	2	1	3	1	3	2	0					
c_3	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	3	4	4	2	2	2	2	1	3	3	1	2	2	0				
a_4	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4	5	3	3	3	3	3	2	4	2	2	3	1	1	0			
b_4	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4	3	5	3	3	3	3	2	2	4	2	1	3	1	2	0		
c_4	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4	3	3	5	3	3	3	2	2	2	4	1	1	3	2	2	0	
ϑ_4	8	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0
	ϑ'''	a'''	b'''	c'''	a''	b''	c''	ϑ''	a'	b'	c'	a	b	c	a_2	b_2	c_2	ϑ_1	a_1	b_1	c_1	a_3	b_3	c_3	a_4	b_4	c_4	ϑ_4

Der Abstand 0 tritt auf 28 mal
" " 1 " " 49 "
" " 2 " " 82 "
" " 3 " " 98 "
" " 4 " " 81 "
" " 5 " " 44 "
" " 6 " " 18 "
" " 7 " " 6 "
" " 8 " " 1 "

$406 = \frac{28 \cdot 29}{2}$

Die Vertauschbarkeit der Moduln (vorige Seite). Da $(a+b, a-b) = (a+b, b)(b, a-b) = (a, b)(b, a)$ ist, so kann die Vertauschbarkeit von a, b durch $(a+b, a-b) > 0$ definirt werden. Nun ist offenbar $a''' = b+c < a'' = b''' = c'' < c_2 = a_3+b_3 < a_3 = b-c$, mithin $(a''', a_3) = (a''', c'')(c'', c_2)(c_2, a_3)$, es ist aber $(a''', c'') = (\vartheta''', b''')$ und $(c_2, a_3) = (b_3, a_3) = (b_3, \vartheta_4)$, mithin
$(a''', a_3) = (\vartheta''', b''')(c'', c_2)(b_3, \vartheta_4)$, hieraus durch Vertauschung
$(b''', b_3) = (\vartheta''', a''')(c'', c_2)(a_3, \vartheta_4)$, $(c''', c_3) = (\vartheta''', b''')(a'', a_2)(b_3, \vartheta_4)$
also
$(b''', b_3)(c''', c_3) = (a''', a_3) \cdot (\vartheta''', a''')(a'', a_2)(a_3, \vartheta_4)$.
Aus $(b''', b_3) > 0$ und $(c''', c_3) > 0$ folgt daher auch $(a''', a_3) > 0$, u. s. w.
Da ferner $\vartheta''' < a''' < a_3 < \vartheta_4$, so ist $(\vartheta''', \vartheta_4) = (\vartheta''', a''')(a''', a_3)(a_3, \vartheta_4)$, mithin
$(b''', b_3)(c''', c_3) = (a'', a_2)(\vartheta''', \vartheta_4)$.