Théorie des 3 modules, grand tableau et nombres de classes

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

2 Fichier(s)

Contributeur·ricesHaffner, Emmylou
ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreThéorie des 3 modules, grand tableau et nombres de classes
Date 189x
Sujet

- dualisme
- dualité
- nombres de classes
- notation3
- trois modules

CoteCod. Ms. Dedekind X 11-2, p. 15
Format1 p. ; 2 f.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionGrand tableau PGCD/PPCM avec notation3 et détail des définitions. Etude de la dualité dans les nombres de classes.
Mode(s) d'écriture

- Document de travail
- Tableau

Relations

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1

Ce document utilise la même notation que :

 Théorie des trois modules, divisibilité.

Afficher la visualisation des relations de la notice.

Mots-clefs

dualisme, dualite, nombres de classes, notation3, trois modules

Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 19/07/2021 Dernière modification le 21/07/2021

Theorie der drei Moduln

Grösste gemeinschaftliche Theiler.

	d'''	a'''	b'''	c'''	a''	b''	c''	d'	a'	b'	c'	a	b	c	a_0	b_0	c_0	d_1	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3	d_4	+
d'''		d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''	d'''
a'''	a'''		$\underline{d'''}$	$\underline{d'''}$	$\underline{d'''}$	a'''	a'''	a'''	$\underline{d'''}$	a'''	a'''	$\underline{d'''}$	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''	a'''
b'''	b'''	$\underline{d'''}$		$\underline{d'''}$	b'''	$\underline{d'''}$	b'''	b'''	b'''	$\underline{d'''}$	b'''	b'''	$\underline{d'''}$	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''	b'''
c'''	c'''	$\underline{d'''}$	$\underline{d'''}$		c'''	c'''	$\underline{d'''}$	c'''	c'''	c'''	$\underline{d'''}$	c'''	c'''	$\underline{d'''}$	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''	c'''
a''	a''	$\underline{d'''}$	a'''	a'''		$\underline{c'''}$	$\underline{b'''}$	a''	a''	$\underline{c'''}$	$\underline{b'''}$	a''	$\underline{c'''}$	$\underline{b'''}$	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''	a''
b''	b''	b'''	$\underline{d'''}$	b'''	$\underline{c'''}$		$\underline{a'''}$	b''	$\underline{c'''}$	b''	$\underline{a'''}$	$\underline{c'''}$	b''	$\underline{a'''}$	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''	b''
c''	c''	c'''	c'''	$\underline{d'''}$	$\underline{b'''}$	$\underline{a'''}$		c''	$\underline{b'''}$	$\underline{a'''}$	c''	$\underline{b'''}$	$\underline{a'''}$	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''	c''
d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'		$\underline{a''}$	$\underline{b''}$	$\underline{c''}$	$\underline{a''}$	$\underline{b''}$	$\underline{c''}$	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'	d'
a'	a'	$\underline{a_0}$	a'	a'	a'	$\underline{a_0}$	$\underline{a_0}$	$\underline{a_0}$		$\underline{c''}$	$\underline{b''}$	a'	$\underline{c''}$	$\underline{b''}$	a'	$\underline{a''}$	$\underline{a''}$	a'	a'	$\underline{a''}$	$\underline{a''}$	a'	a'	a'	a'	a'	a'	a'	a'
b'	b'	b'	$\underline{b_0}$	b'	$\underline{b_0}$	b'	$\underline{b_0}$	$\underline{b_0}$	$\underline{c''}$		$\underline{a''}$	$\underline{c''}$	b'	$\underline{a''}$	$\underline{b''}$	b'	$\underline{b''}$	b'	$\underline{b''}$	b'	$\underline{b''}$	b'	b'	b'	b'	b'	b'	b'	b'
c'	c'	c'	c'	$\underline{c_0}$	$\underline{c_0}$	$\underline{c_0}$	c'	$\underline{c_0}$	$\underline{b''}$	$\underline{a''}$		$\underline{b''}$	$\underline{a''}$	c'	$\underline{c''}$	$\underline{c''}$	c'	c'	$\underline{c''}$	$\underline{c''}$	c'	c'	c'	c'	c'	c'	c'	c'	c'
a	a	$\underline{a_1}$	a	a	a	$\underline{a_1}$	$\underline{a_1}$	$\underline{a_1}$	a	$\underline{a_1}$	$\underline{a_1}$		$\underline{c''}$	$\underline{b''}$	$\underline{a'}$	$\underline{a'}$	$\underline{a'}$	$\underline{a'}$	a	$\underline{a'}$	$\underline{a'}$	a	$\underline{a'}$	$\underline{a'}$	$\underline{a'}$	a	a	a	a
b	b	b	$\underline{b_1}$	b	$\underline{b_1}$	b	$\underline{b_1}$	$\underline{b_1}$	$\underline{b_1}$	b	$\underline{b_1}$	$\underline{c''}$		$\underline{a''}$	$\underline{b'}$	$\underline{b'}$	$\underline{b'}$	$\underline{b'}$	$\underline{b'}$	b	$\underline{b'}$	$\underline{b'}$	b	$\underline{b'}$	b	$\underline{b'}$	b	b	b
c	c	c	c	$\underline{c_1}$	$\underline{c_1}$	$\underline{c_1}$	c	$\underline{c_1}$	$\underline{c_1}$	$\underline{c_1}$	c	$\underline{b''}$	$\underline{a''}$		$\underline{c'}$	$\underline{c'}$	$\underline{c'}$	$\underline{c'}$	$\underline{c'}$	$\underline{c'}$	c	$\underline{c'}$	$\underline{c'}$	c	c	c	$\underline{c'}$	c	c
a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	$\underline{d_1}$	$\underline{d_1}$	$\underline{a_1}$	$\underline{b_1}$	$\underline{c_1}$		$\underline{d'}$	$\underline{d'}$	a_0	a_0	$\underline{d'}$	$\underline{d'}$	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	$\underline{d_1}$	b_0	$\underline{d_1}$	$\underline{a_1}$	$\underline{b_1}$	$\underline{c_1}$	$\underline{d'}$		$\underline{d'}$	b_0	$\underline{d'}$	b_0	$\underline{d'}$	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0	b_0
c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	$\underline{d_1}$	$\underline{d_1}$	c_0	$\underline{a_1}$	$\underline{b_1}$	$\underline{c_1}$	$\underline{d'}$	$\underline{d'}$		c_0	$\underline{d'}$	$\underline{d'}$	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0	c_0
d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	$\underline{a_2}$	$\underline{b_2}$	$\underline{c_2}$	d_1	d_1	d_1		$\underline{a_0}$	$\underline{b_0}$	$\underline{c_0}$	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	$\underline{a_2}$	$\underline{a_2}$	a_1	$\underline{c_2}$	$\underline{b_2}$	a_1	$\underline{a_2}$	$\underline{a_2}$	$\underline{a_0}$		$\underline{d'}$	$\underline{d'}$	a_1	$\underline{a_0}$	$\underline{a_0}$	$\underline{a_0}$	a_1	a_1	a_1	a_1
b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	$\underline{b_2}$	b_1	$\underline{b_2}$	$\underline{c_2}$	b_1	$\underline{a_2}$	$\underline{b_2}$	b_1	$\underline{b_2}$	$\underline{b_0}$	[illegible]		$\underline{d'}$	$\underline{b_0}$	b_1	$\underline{b_0}$	b_1	$\underline{b_0}$	b_1	b_1	b_1
c_1	c_1	c_1	c_1	c_1	c_1	c_1	c_1	c_1	$\underline{c_2}$	$\underline{c_2}$	c_1	$\underline{b_2}$	$\underline{a_2}$	c_1	$\underline{c_2}$	$\underline{c_2}$	c_1	$\underline{c_0}$	[illegible]	[illegible]		$\underline{c_0}$	$\underline{c_0}$	c_1	c_1	c_1	$\underline{c_0}$	c_1	c_1
a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	$\underline{c_3}$	$\underline{b_3}$	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	$\underline{c_3}$	$\underline{b_3}$		$\underline{d_1}$	$\underline{d_1}$	$\underline{d_1}$	a_2	a_2	a_2	a_2
b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	$\underline{c_3}$	b_2	$\underline{a_3}$	b_2	b_2	b_2	b_2	$\underline{c_3}$	b_2	$\underline{a_3}$	$\underline{d_1}$		$\underline{d_1}$	b_2	$\underline{d_1}$	b_2	b_2	b_2
c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	$\underline{b_3}$	$\underline{a_3}$	c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	$\underline{b_3}$	$\underline{a_3}$	c_2	$\underline{d_1}$	$\underline{d_1}$		c_2	c_2	$\underline{d_1}$	c_2	c_2
a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	$\underline{d_4}$	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	$\underline{d_4}$	a_3	a_3	$\underline{d_4}$	a_3	a_3		$\underline{c_2}$	$\underline{b_2}$	a_3	a_3
b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	$\underline{d_4}$	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	$\underline{d_4}$	b_3	b_3	$\underline{d_4}$	b_3	$\underline{c_2}$		$\underline{a_2}$	b_3	b_3
c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	$\underline{d_4}$	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	$\underline{d_4}$	c_3	c_3	$\underline{d_4}$	$\underline{b_2}$	$\underline{a_2}$		c_3	c_3
d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4		d_4
—	d'''	a'''	b'''	c'''	a''	b''	c''	d'	a'	b'	c'	a	b	c	a_0	b_0	c_0	d_1	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3	d_4	

Kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Definitionen:

$d''' = a+b+c$; $d_4 = a-b-c$

$a''' = b+c$, $b''' = c+a$, $c''' = a+b$; $a_3 = b-c$, $b_3 = c-a$, $c_3 = a-b$

$d' = a'''-b'''-c'''$; $d_1 = a_3+b_3+c_3$

$a'' = a+d'$, $b'' = b+d'$, $c'' = c+d'$; $a_2 = a-d_1$, $b_2 = b-d_1$, $c_2 = c-d_1$

$a' = a+d_1$, $b' = b+d_1$, $c' = c+d_1$; $a_1 = a-d'$, $b_1 = b-d'$, $c_1 = c-d'$

$a_0 = a'-d' = a_1+d_1$, $b_0 = b'-d' = b_1+d_1$, $c_0 = c'-d' = c_1+d_1$

Oder auch:

$a'' = b'''-c'''$, $b'' = c'''-a'''$, $c'' = a'''-b'''$; $a_2 = b_3+c_3$, $b_2 = c_3+a_3$, $c_2 = a_3+b_3$

$a' = a+a_2$, $b' = b+b_2$, $c' = c+c_2$; $a_1 = a-a''$, $b_1 = b-b''$, $c_1 = c-c''$

$a_0 = a_1+a_2 = a'-a''$, $b_0 = b_1+b_2 = b'-b''$, $c_0 = c_1+c_2 = c'-c''$

Roth unterstrichen sind die 2.117 Resultanten, welche von jeder ihrer beiden Componenten verschieden sind; die übrigen 2.261 Stellen geben Theilbarkeiten. $261 + 117 = 378 = \frac{28}{2} \cdot 27$

Einfache Schritte und Klassen-Anzahlen:

$$(d''', a''') = (b''', c'') = (c'', b'') = (a'', d') = (a', a_0) = (a, a_1) = a$$
$$(d''', b''') = (c''', a'') = (a''', c'') = (b'', d') = (b', b_0) = (b, b_1) = b$$
$$(d''', c''') = (a''', b'') = (b'', a'') = (c'', d') = (c', c_0) = (c, c_1) = c$$
$$(a_3, d_4) = (c_2, b_3) = (b_2, c_3) = (d_1, a_2) = (a_0, a_1) = (a', a) = a_1$$
$$(b_3, d_4) = (a_2, c_3) = (c_2, a_3) = (d_1, b_2) = (b_0, b_1) = (b', b) = b_1$$
$$(c_3, d_4) = (b_2, a_3) = (a_2, b_3) = (d_1, c_2) = (c_0, c_1) = (c', c) = c_1$$

$$\left.\begin{array}{l}(a'', a') = (b'', b') = (c'', c') = (d', a_0) = (d', b_0) = (d', c_0) = \\ (a_1, a_2) = (b_1, b_2) = (c_1, c_2) = (a_0, d_1) = (b_0, d_1) = (c_0, d_1) = \end{array}\right\} = h$$ [illegible]

$(b, c) = h\,b\,c_1$	$(c, b) = h\,c\,b_1$	$(d''', d') = abc$
$(c, a) = h\,c\,a_1$	$(a, c) = h\,a\,c_1$	$(d', d_1) = h^2$
$(a, b) = h\,a\,b_1$	$(b, a) = h\,b\,a_1$	$(d_1, d_4) = a_1 b_1 c_1$

$$(b, c)(c, a)(a, b) = (c, b)(a, c)(b, a) = h^2\,abc\,a_1 b_1 c_1 = h\,(d''', d_4)$$

Den letzten Satz kann man auch ohne die vollständige Theorie der drei Moduln (Dualismus), [illegible] durch die drei Elementar-Sätze

I. $(a, b) = (a + b, b)$

II. $(a, b) = (a, a - b)$

III. Wenn g Divisor von m, und m Divisor von m', so ist $(g, m') = (g, m)(m, m')$

beweisen. In der That, mit Anwendung der obigen Bezeichnungen (nicht Sätze) ist

$$(b, c) = (b + c, c) = (a'', c) \text{ zufolge I},$$

da ferner $a'' = b'''$ Multiplum von a''' und Divisor von c ist, so ist

$$(a'', c) = (a''', c'')(c'', c) \text{ zufolge III};$$

ferner ist

$$(a''', c'') = (a''', a''' - b''') = (a''', b''') \text{ zufolge II},$$

und ist aber ~~[illegible]~~ $a''' + b''' = (b + c) + (c + a) = b + c + a = a + b'''$, mithin

$$(a''', b''') = (a''' + b''', b''') = (b + b''', b''') = (b, b''') \text{ zufolge I},$$

und dasselbe ergiebt sich die erste der sechs Gleichungen

$$\text{IV.}\ \begin{cases}(b, c) = (b, b''')(c'', c);\ (c, a) = (c, c''')(a'', a);\ (a, b) = (a, a''')(b'', b) \\ (c, b) = (c, c''')(b'', b);\ (a, c) = (a, a''')(c'', c);\ (b, a) = (b, b''')(a'', a)\end{cases}$$

woraus die übrigen durch Permutation folgen; und zugleich ergiebt sich der obige Satz

$$\text{V.}\ (b, c)(c, a)(a, b) = (c, b)(a, c)(b, a) = (a, a''')(b, b''')(c, c''')(a'', a)(b'', b)(c'', c)$$

Dualistisch ergiebt sich ebenso

$$(b, c) = (b, b - c) = (b, a_2) \text{ zufolge II},$$

da ferner $b_2 = c_2 + a_2$ Divisor von a_2 und Multiplum von b ist, so ist

$$(b, a_2) = (b, b_2)(b_2, a_2) \text{ zufolge III},$$

ferner ist

$$(b_2, a_2) = (c_2 + a_2, a_2) = (c_2, a_2) \text{ zufolge I},$$

es ist aber $c_2 - a_2 = (a - b) - (b - c) = a - b - c = c - c_2$, mithin

$$(c_2, a_2) = (c_2, c_2 - a_2) = (c_2, c - c_2) = (c_2, c) \text{ zufolge II},$$

woraus

$$\text{VI.}\ \begin{cases}(b, c) = (b, b_2)(c_2, c);\ (c, a) = (c, c_2)(a_2, a);\ (a, b) = (a, a_2)(b_2, b) \\ (c, b) = (c, c_2)(b_2, b);\ (a, c) = (a, a_2)(c_2, c);\ (b, a) = (b, b_2)(a_2, a)\end{cases}$$

und

$$\text{VII.}\ (b, c)(c, a)(a, b) = (c, b)(a, c)(b, a) = (a, a_2)(b, b_2)(c, c_2)(a_2, a)(b_2, b)(c_2, c)$$