Lettre de Jacques à D'Alembert, 15 mars 1771

Expéditieur(s) : Jacques

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

4 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Citer cette page

Jacques, Lettre de Jacques à D'Alembert, 15 mars 1771, 1771-03-15

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 15/12/2025 sur la plate-forme EMAN : https://eman-archives.org/dalembert/items/show/1221

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitLa bonté avec laquelle vous avez reçu mes deux…
RésuméBonté avec laquelle D'Al. a reçu ses deux mém., lui en présente un troisième et lui demande si sa méthode de résolution des équations du troisième degré est neuve. Autres classes d'équations résolubles ainsi.
Justification de la datationNon renseigné
Numéro inventaire71.22
Identifiant133
NumPappas1141

Présentation

Sous-titre1141
Date1771-03-15
Mentions légales

- Numérisation : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG).

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreNon renseigné
Publication de la lettreNon renseigné
Lieu d'expéditionBesançon
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

Information générales

LangueFrançais
Sourceautogr., d.s., « Besançon », 4 p.
Localisation du documentParis Institut, Ms. 2466, f. 106-107

Description & Analyse

Analyse/Description/RemarquesNon renseigné
Auteur(s) de l'analyseNon renseigné
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

Jacques

Monsieur

La bonté avec laquelle vous avez reçu mes deux premiers Mémoires m'engage à vous en présenter un troisième, et me fait espérer que vous voudrez bien me pardonner quelques moments de distraction que j'apporterai à vos grandes occupations. J'y traite une Méthode peut-être nouvelle pour la résolution des équations: je vous prie de la juger.

Soit proposée l'équation $y^3+py^2+qy+r=0$. Je fais $y=x+m+nx^{-1}$, on aura

$$\begin{aligned}
y^3 &= x^3+3mx^2+3m^2x+m^3+3m^2nx^{-1}+3mn^2x^{-2}+n^3x^{-3}\\
&\qquad\quad +3n \quad +6mn+3n^2\\
+py^2 &= px^2+2pmx+pm^2+2pmnx^{-1}+pn^2x^{-2}\\
&\qquad\quad +2pn\\
+qy &= qx+qm+qnx^{-1}\\
+r &= +r
\end{aligned}$$

Si on suppose les indéterminées m, n respectivement égales à $-\frac{1}{3}p$, $\frac{1}{9}p^2-\frac{1}{3}q$,

$x^6+\overline{\frac{2}{27}p^3-\frac{1}{3}pq+r}\,x^3=-\frac{1}{729}p^6+\frac{1}{81}p^4q-\frac{1}{27}p^2q^2+\frac{1}{27}q^3$,

d'où $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{6}pq-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{-\frac{1}{108}p^2q^2+\frac{1}{27}p^3r-\frac{1}{6}pqr+\frac{1}{27}q^3+\frac{1}{4}r^2}}$.

Et $y=-\frac{p}{3}+\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}+\frac{pq}{6}-\frac{r}{2}\pm\sqrt{-\frac{p^2q^2}{108}+\frac{p^3r}{27}-\frac{pqr}{6}+\frac{q^3}{27}+\frac{r^2}{4}}}-\sqrt[3]{\frac{p^3}{27}-\frac{pq}{6}+\frac{r}{2}\pm\sqrt{-\frac{p^2q^2}{108}+\frac{p^3r}{27}-\frac{pqr}{6}+\frac{q^3}{27}+\frac{r^2}{4}}}$.

Cette Méthode qui ne conduit pas à un résultat plus simple que les autres, ne demande pour le calcul que le tems qu'on employeroit à faire évanouir le second terme de l'équation générale; et est assez commode pour ramener à un degré sous-double toute équation de cette forme, $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}\ldots\ldots+gx^{\frac{m}{2}}\ldots\ldots+bn^{\frac{m}{2}-2}x^2+an^{\frac{m}{2}-1}x+n^{\frac{m}{2}}=0$. On suppose que m soit pair; s'il ne l'étoit pas, on le rendroit tel en divisant l'équation par une racine commensurable d'une dimension.

Soit par ex. l'équation $x^6+ax^5+bx^4+cx^3+bnx^2+an^2x+n^3=0$,
que j'écris ainsi, $x^3+ax^2+bx+c+bnx^{-1}+an^2x^{-2}+n^3x^{-3}=0$.
en faisant $y=x+nx^{-1}$, on aura,

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3 \quad +3nx \quad +3n^2x^{-1} \quad +n^3x^{-3} \\ +py^2 &= \quad px^2 \quad +2pn \quad +pn^2x^{-2} \\ +qy &= \quad qx \quad +qnx^{-1} \\ +r &= \quad +r \end{aligned}$$

Et en supposant $a=p$, $3n+q=b$, $2pn+r=c$, la somme des seconds membres de ces équations donnera la proposée, $x^3+ax^2+bx+c+bnx^{-1}$ &c. ce qui montre que la résolution de celle ci dépend de ces deux équations, $y=x+nx^{-1}$, et $y^3+ay^2+\overline{b-3n}\,y+\overline{c-2an}=0$.

Soit encore l'équation $x^4+ax^3+bx^2+anx+n^2=0$, que j'écris ainsi, $x^2+ax+b+anx^{-1}+n^2x^{-2}=0$.
En faisant $y=x+nx^{-1}$, on aura,

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 \quad +2n \quad +n^2x^{-2} \\ +ay &= \quad ax \quad +anx^{-1} \\ +\overline{b-2n} &= \quad +\overline{b-2n} \end{aligned}$$

D'où l'on déduira, $y=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2n}$; $x^2+\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2n}\,x=-n$; et
$x=-\frac{1}{4}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2n}\pm\sqrt{\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}n\mp\frac{1}{4}a\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2n}}$, expression des 4 valeurs de x.

Soit en troisième lieu l'équation $z^4+pz^2+qz+r=0$, qui en faisant $z=x+n$,
devient

$$\begin{aligned} x^4+4nx^3+6n^2x^2&+4n^3x+n^4=0; \\ +p\quad &+2pn\quad +pn^2 \\ &+q\quad +qn \\ &\quad +r \end{aligned}$$

et aura la condition requise pourvu qu'on fasse, $4n^4+pn^2+qn+r=4n^3+2pn+q$, c'est à dire pourvu qu'on prenne n pour racine de l'équation $n^3+\frac{r-\frac{1}{4}p^2}{q}n^2-\frac{1}{2}pn-\frac{1}{8}q=0$.

On en tirera,

$$x = -u \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2u^2 - p + 2\sqrt{u^4 + pu^2 + qu + r}} \pm \sqrt{\tfrac{u^2}{2} - \tfrac{p}{4} - \tfrac{1}{2}\sqrt{u^4 + pu^2 + qu + r} \mp \tfrac{1}{2}u\sqrt{-2u^2 - p + 2\sqrt{u^4 + pu^2 + qu + r}}}$$

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2u^2 - p + 2\sqrt{u^4 + pu^2 + qu + r}} \pm \sqrt{\tfrac{u^2}{2} - \tfrac{p}{4} - \tfrac{1}{2}\sqrt{u^4 + pu^2 + qu + r} \mp u\sqrt{-2u - p + 2\sqrt{u^4 + pu^2 + qu + r}}}$$

La reduite $u^6 + \frac{2r - \frac{1}{4}p^2}{q} u^2 - \frac{1}{2}pu - \frac{1}{8}q = 0$, qui est assez simple, a l'avantage de faire connoitre le cas où l'equation du quatrième degré peut se résoudre par la Méthode des formes, quoiqu'elle ne soit pas décomposable en deux équations de ce degré. Dans ce cas, la reduite a une racine commensurable d'une dimension, et la valeur de z se trouve exprimée assez simplement; mais hors de ce cas l'expression de z est bien compliquée.

Il n'est pas moins évident qu'on ramenera au degré sous-double les équations, $x^4 + ax^3 + bx^2 - anx + n^2 = 0$, et $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 - cnx^2 + bn^2x - an^3x + n^4 = 0$.

Si on fait $y = x + x^{-1}$, on pourra résoudre algébriquement toutes les équations à l'infini qui auront cette forme.

$y^m - my^{m-2} + \left(m.\overline{m-2} - m.\frac{\overline{m-1}}{2}\right) y^{m-4} + \left(m.\overline{m-2} - m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\overline{m-4} + m.\frac{\overline{m-2}}{2}.\frac{\overline{m-3}}{2} - m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\frac{\overline{m-2}}{3}\right) y^{m-6} + \&c = 0$; ou cette autre, $y^m + Py^{m-2} + Qy^{m-4} + Ry^{m-6} + Sy^{m-8} + \&c \ldots + L = 0$. (on suppose $P = -m$; Q contiendra 1° le coefficient du troisième terme du binome $x + x^{-1}$ élevé à la puissance m, 2° $-P \times \overline{m-2}$; c'est-à-dire $Q = -m \times \frac{\overline{m-1}}{2} - P \times \overline{m-2}$; R contiendra 1° le coefficient du quatrième terme du binome $x + x^{-1}$ élevé à la puissance m, 2° $-P \times \overline{m-2} \times \frac{\overline{m-3}}{2}$; 3° $-Q \times \overline{m-4}$; S contiendra 1° $-m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\frac{\overline{m-2}}{3}.\frac{\overline{m-3}}{4}$, 2° $-P \times \overline{m-2}.\frac{\overline{m-3}}{2}.\frac{\overline{m-4}}{3}$; 3° $-Q \times \overline{m-4}.\frac{\overline{m-5}}{2}$, 4° $-R \times \overline{m-6}$. On voit quelle est la loy selon laquelle se formeroient les coefficients des termes suivants) la quantité L est prise à volonté, et la solution a lieu, quelque soit cette quantité.

Soit donc $y = x + x^{-1}$, on aura,

$$\begin{aligned}
y^m &= x^m + mx^{m-2} + m.\tfrac{\overline{m-1}}{2}x^{m-4} + m.\tfrac{\overline{m-1}}{2}.\tfrac{\overline{m-2}}{3}x^{m-6} + \&c \ldots + x^{-m} \\
+Py^{m-2} &= Px^{m-2} + P \times \overline{m-2}\, x^{m-4} + P \times \overline{m-2} \times \tfrac{\overline{m-3}}{2} x^{m-6} + \&c \ldots + Px^{-m+2} \\
+Qy^{m-4} &= Qx^{m-4} + Q \times \overline{m-4}\, x^{m-6} + \&c \ldots \\
+ \&c &= + \&c \ldots \\
+L &= + L
\end{aligned}$$

Equations dans lesquelles tous les termes du second membre se détruisent, excepté le premier, le dernier et celuy du milieu; de sorte que si m est impair, la somme des seconds Membres se réduira à $x^m + C + x^{-m} = 0$; d'où l'on déduira

$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}C \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 - 1}}$, et $y = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}C \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{-\frac{1}{2}C \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 - 1}}}$.

Si m n'étoit point, le terme du milieu contiendroit avec C plusieurs autres quantités connues dont appellant la somme F, on auroit pour la somme des seconds Membres $x^m + C + F + x^{-m} = 0$

d'où $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}F \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 + \frac{1}{2}CF + \frac{1}{4}F^2 - 1}}$,

et $y = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}F \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 + \frac{1}{2}CF + \frac{1}{4}F^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{-\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}F \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 + \frac{1}{2}CF + \frac{1}{4}F^2 - 1}}}$

Si on avoit une équation telle que la loy dont nous avons parlé fut observée dans les coefficients de tous les termes excepté dans celuy qui tient le milieu entre y^0 et y^m, elle pourroit encore se résoudre en faisant $y = x + x^{-1}$; car la somme des seconds membres donneroit une équation de la forme suivante $x^m + ax^{\frac{m}{2}} + D + ax^{-\frac{m}{2}} + x^{-\frac{m}{2}} = 0$, d'où il seroit aisé de tirer x et y.

On pourroit aussi résoudre toute équation telle que la loy ci-dessus fut observée dans les coefficients de tous les termes excepté dans ceux de $y^{\frac{2m}{3}}$ et $y^{\frac{m}{3}}$, en faisant toujours $y = x + x^{-1}$; car la somme des seconds Membres donneroit une équation de cette forme,

$x^m + ax^{\frac{2m}{3}} + bx^{\frac{m}{3}} + D + bx^{-\frac{m}{3}} + ax^{-\frac{2m}{3}} + x^{-m} = 0$, d'où l'on déduiroit aisément x et y.

Il en seroit de même de toute équation dans laquelle cette loy seroit observée à l'égard de tous les coefficients excepté ceux de $y^{\frac{3m}{4}}$, $y^{\frac{2m}{4}}$, $y^{\frac{m}{4}}$. &c.

En faisant $y = x - x^{-1}$, on trouveroit une autre classe d'équations qui se pourroit résoudre algébriquement; de même qu'en faisant $y = x + m + nx^{-1}$. &c.

Voila, Monsieur, les recherches que je prends la liberté de vous présenter, et sur lesquelles je vous prie de m'honorer de [illegible]. Pardon de rechef pour les moments que je vous ferai perdre.

J'ay l'honneur d'être dans les sentiments de la reconnoissance la plus parfaite.

Besançon 15 Mars 1771.

Monsieur

Votre très humble et très obéissant Serviteur
L'Abbé Jacques
Professeur de Mathématiques