Lettre de Calandrelli à D'Alembert, 21 février 1781

Expéditieur(s) : Calandrelli

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

9 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Citer cette page

Calandrelli, Lettre de Calandrelli à D'Alembert, 21 février 1781, 1781-02-21

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 13/01/2026 sur la plate-forme EMAN :
https://eman-archives.org/dalembert/items/show/1265

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitLa vostra bontà in altra occasione da me esperimentata...
RésuméDiscussions sur les aspects mathématiques du t. VI des Opuscules. Mém. 51, §1, p. 362 : à propos des équations fonctionnelles. Mém. 46, remarque (a), p. 134 : au sujet de l'apparition des quantités imaginaires dans les intégrales. Mém. 46, remarque (b), p. 144 : comparaison à l'infini entre la variable et son logarithme. Mém. 46, appendice, p. 420 : suite des débats sur les logarithmes des quantités négatives, notamment à l'occasion d'un mém. de Pietro Paoli.
Justification de la datationNon renseigné
Numéro inventaire81.12
Identifiant81
NumPappas1837

Présentation

Sous-titre1837
Date1781-02-21
Mentions légales

- Fiche : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle). Licence Creative Commons Attribution - Partage à l'identique 3.0 (CC BY-SA 3.0 FR).
- Numérisation : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG).

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreNon renseigné
Publication de la lettreNon renseigné
Lieu d'expéditionRome
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

Information générales

LangueFrançais
Sourceautogr., d.s., « Roma », en italien, 8 p.
Localisation du documentParis Institut, Ms. 2466, f. 25-28

Description & Analyse

Analyse/Description/RemarquesNon renseigné
Auteur(s) de l'analyseNon renseigné
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

Calandrelli Sig.re 25

La vostra bontà in altra occasione da me sperimentata mi fa ardito di indirizzarvi questo mio piccolo opuscolo, quale non essendo altro, che una derivazione de' principj da voi con tanta accortezza stabiliti, mi persuado, che possa incontrare la vostra approvazione. Ma giacchè mi si presenta questo sì favorevole incontro, permettetemi o Sig.re che diverse cose aggiunga riguardanti il vostro VI Tomo di Opuscoli Matematici. Alla pagina adunque (361) ponete la seguente formola $\frac{\varphi z+\varphi n}{1-\varphi z\cdot\varphi n} = \varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$: quindi soggiungete: e con la condizione qui dovrà servir a trovar φz. Ora per pervenir, differenziando li due membri della medesima equazione, con facendo di prima variar z, poscia con facendo variar n, noi avremo $\frac{(1+\varphi n^2)}{(1-\varphi z\cdot\varphi n)} \times \frac{d\varphi z}{dz} = \frac{1+n^2}{(1-nz)^2} \times \Delta\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$;

$\frac{(1+\varphi z^2)}{(1-\varphi z\cdot\varphi n)} \times \frac{d\varphi n}{dn} = \frac{1+z^2}{(1-nz)^2} \times \Delta \frac{z+n}{1-nz}$. [illegible] si riflette, che dall'equazione $\frac{\varphi z+\varphi n}{1-\varphi z\cdot\varphi n}$ $= \varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$ senza [illegible] d'vantaggio si deduce l'equazione differenziale [illegible] non si [illegible] il rapporto delle forze [illegible] può sempre [illegible], che variando il rapporto delle forze [illegible] la somiglianza della funzione [illegible] variando z, [illegible] la dimostrazione sembra non si possa [illegible] zione di z: onde [illegible] la funzione di z simile alla funzione di $(n+dn)$. Se [illegible] la funzione di n simile alla funzione di $(z+dz)$; la funzione si potrà supporre [illegible] φz [illegible] la dimostrazione si ridurrebbe alla [illegible] simile nelle equazioni [illegible] nel caso di $n=0$; nel qual caso, l'[illegible] φz è uguale a z nel caso di [illegible] ugualmente dalla [illegible] delle due forze [illegible] il valore di z, φz è [illegible] ma qualunque sia il valore [illegible] generalmente $\varphi z = z$: [illegible] deve essere [illegible] simile: dunque [illegible] le riflessioni sopra la [illegible] eccellenti, e degne di voi o Sig.re sono le riflessioni [illegible] alla pag. (129) e seguenti. Non [illegible] XLVI Memoria, quali [illegible] $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$; allorchè $x>1$; si dovrà supporre [illegible] sempre però perchè [illegible] determinare l'integrale di $\int\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$, e non $= \frac{dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{xx-1}}$. ma a me sembra, che non sia [illegible]

$\frac{dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{xx-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot l\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-1}}$: ma [illegible] il quale è necessario riflettere il vero integrale, per determinare il quale [illegible] la costante al valore di $\sqrt{xx-1}$ [illegible] anche nell'aggiunta della costante [illegible] sarà l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{xx-1}}$ sarà $\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot l\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot l\frac{1}{\sqrt{-1}} =$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot l\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\, l\frac{1}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{-1}\, l\frac{x+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-1}} = \int\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$: onde perchè nel determinar l'integrale e la costante. [illegible] si riflette allo [illegible] valore di $\sqrt{xx-1}$, sembra si possa supporre $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$; come anche $= \frac{dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{xx-1}}$.

[2]

Seguirono le vostre riflessioni sopra la indicata memoria, alla
(1494) appresso una ragione per la quale $x\,l\frac{1}{x}$ debba essere pure
infinitesima, essendo x infinitamente piccola. A questo effetto con-
siderate per ascissa il numero x, e per semiordinata il logar[itmo]
corrispondente y; quindi soggiungete, essendo x' infinita, potersi
esprimere y per una serie di termini di questa forma ax^m
essendo m minore dell'unità. Se ben comprendo la vostra
[ragio]ne, mentre allora essendo $dy = amx'^{m-1}dx' + \&c$, sarà, come
essere nella logaritmica, dy infinitesima rispetto a dx', es[sendo]
x' infinita. Non comprendo però perchè essendo $y = lx'$;
essendo $l(1+x') = lx'$ in caso di $x' = \infty$, vi siate voluto appoggiar[e]
[ad] esprimere y per $x' - \frac{x'^2}{2} + \frac{x'^3}{3} - \frac{x'^4}{4} + \&c$ come porta il meto[do]
commune, secondo il quale però si trova $dy : dx' = 1 - x' + x'^2$
: 1; qual seconda ragione non vedo come possa esprimere la [ra-]
gione di $dy : dx'$, qual è la ragione dell'uno all'infinito. E
tutto ciò riflettendo unicamente al caso di $x = 1$ nel quale
esigge la natura della logaritmica, dover essere $dy : dx' = 1 :$
1 e come ricava la formola generale di $dy = dx - xdx + x^2dx - \&c$
si trova $dy : dx = 0 : 1$; sempre più mi persuado essere co[sa]
[de]ll'equazione $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c$, nel caso di $x \equiv 1$, d'onde
anche addurne diverse ragioni, se questa causa non fosse
di una troppo lunga digressione. Ma per ritornare al vo[stro]
assunto, è certo, che preso l'unità per protonumero e sotta[ngen-]
te, sarà $l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \&c$; onde ponendo x prossi[ma]
quanto si vole all'unità, sarà $\frac{1}{1-x}$ quantità infinita, e l(
quantità infinitesima: ma essendo $x = (1 - \frac{1}{\infty})$ sarà $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
quantità infinita, onde moltiplicata per un'infinitesima (l
quantità infinita, e non già infinitesima
dovrà essere una quantità finita, e non già infinitesima
Ma poichè fin qui ho toccato questo, permettetemi, che a voi
proponga un paradosso quale qui ora alla mente mi si
[af]faccia. Essendo 1 il protonumero si concepisca la logaritm[ica]
[...], quale, non potendo mai concorrere con il suo assintoto, a cui
tutte le semiordinate esprimono da $(1-x)$, considerandosi le
semiordinate minori del protonumero; e essendo x prossima
quanto si vole all'unità, ma non mai eguale, ed essendo ge-
neralmente $l(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c)$; e non potendo nel tempo istesso
divenire $x = 1$, sarà il logaritmo, o distanza dal protonumero
qualunque minima semiordinata, minore di $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c)$;
avvedendo dal segno negativo. Si concepisca ora una distanza
presa nell'assintoto, incominciando dal protonumero, quale sia

a metà di esempio $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot4}+\&c.$; è certo che in questa distanza minore di $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\&c.$ qualche semiordinata vi deve; ma siccome non vi è quantità o linea, corrispondente, quale divisibile non sia in qualunque numero di parti, tanto minima per la natura della curva, che una possa esser per esempio, di questa minima semiordinata y, sarà in una distanza [illegible] volte maggiore della distanza della semiordinata y: onde nella distanza $n\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\&c.)$ si avrà una semiordinata contro la natura istessa della curva.

Finalmente alla pag. 90 ho riscontrata la vostra addizione per la nota (a) della XLVI Memoria, e con sommo mio piacere ho letta la semplicissima ragione, che adducete per provare $L\cdot1=0$, e quella per somma vostra bontà mi avevate significata per lettera prima che nelle mie mani fosse pervenuto il vostro Tom. VI di opuscoli Matematici. Combinando il metodo di Eulero con diverse cose da lui esposte nella sua introduzione all'Analisi, io trovo, che il metodo di Eulero per provare essere i logaritmi delle quantità negative immaginarii, è assurdo, o che questo istesso metodo deve provare essere i logaritmi delle quantità negative reali. In questo frattempo però è giunto nelle mie mani un tomo di opuscoli Analitici stampato in Livorno l'Anno 1780 dedicato a S.A.R. Gran-Duca di Toscana dall'autore Pietro Paoli, giovane di grande e somma aspettazione. Nel primo opuscolo, quale ha per titolo = De inventione functionum ex datis quibusdam proprietatibus, sive de integratione quarumdam aequationum per differentias finitas ad variabiles involventium; supponendo, che y,x esprima una funzione qualunque di x, ed $y,2x$, $y,4x$, $y,8x$ &c. esprimano delle quantità nelle quali si trasforma la funzione y,x ponendo in questa in luogo di x, $2x$, $4x$, $8x$ &c. intraprende l'Autore l'integrazione dell'equazione $Ay,x + By,2x + Cy,4x + \ldots\ldots Ny,2^n x = 0$; nella quale $A, B, C, \ldots N$ rappresentano delle costanti quantità date. Ma per venire alla [illegible], prenderò a risolvere secondo il metodo dell'Autore, una più semplice equazione. Sia adunque $Ay,x + By,2x + Cy,4x = 0$. Si faccia $y,x = ax^m$, essendo a una costante qualunque arbitraria ed m una quantità costante indeterminata. Sostituendo adunque questo valore, l'equazione data si trasformerà in $Aax^m + B2^m ax^m + Ca4^m x^m = 0$; onde $A + B2^m + C4^m = 0$. Si supponga $2^m = z$, e si avrà $Cz^2 + Bz + A = 0$; onde $A + B2^m + C4^m = A + Bz + Cz^2 = 0$; quindi $z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2C}$; ed $m = \frac{L(-B \pm \sqrt{B^2-4AC}) - L2C}{L2}$. I due diversi valori di z

[1.4]

si hanno 0, 0, sarà $y,x = ax^0 + bx^0$; essendo a, b due diverse, e arbitrarie costanti. Si supponga ora $B=4$, $A=3$, $C=1$ e si avrà
sarà $y,x = ax^{\frac{l.-1 - l.1}{l.1}} + bx^{\frac{l.4 - l.1}{l.1}}$; $Ay,x + By,-x + Cy,4x = 0 =$
$3y,x + 4y,-x + y,4x$; ma il completo integrale di questa equazione è $ax^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} + bx^{\frac{l.4 - l.1}{l.1}}$: e si prenda adunque la prima, e la seconda parte di questo completo integrale e si facciano nell'equazione le debite sostituzioni, si trova sempre l'equazione ridotta al zero. Sia adunque $y,x = ax^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}}$, e si troverà $y,-x = a(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} x^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}}$; $y,4x = a4^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} x^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}}$. Si supponga inoltre $l.-1 = l.1$ e sarà $y,x = ax^0$; $y,-x = a(-1)^0x^0$; $y,4x = a4^0x^0$; onde sostituendo questi valori nella data equazione sarà $3ax^0 + 4a(-1)^0x^0 + a4^0x^0 = 0$; il che è falso. Suò ciò dall'autore dimostratosi: essendo π la semicirconferenza del cerchio, il di cui raggio è l'unità, suppone con l'Eulero $l.-1 = l.1 + \pi\sqrt{-1}$: perchè così si pone da calcolare. Essendo $(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = (-1)^{\frac{l.1+\pi\sqrt{-1}-l.1}{l.1}} = (-1)^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{l.1}} = \cos.\frac{\pi\sqrt{-1}}{l.1} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{\pi\sqrt{-1}}{l.1}$; sarà $(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = -1$, e $4^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = 1$; onde sostituendo questi valori nella data equazione, si avrà $3ax^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} - 4ax^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} + ax^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = 0$. A me però sembra, che le cose fin qui dette non somministrino un potente l'autore argomento per credere, che senza errore non si possa asserire $l.-1 = l.1$. Infatti se secondo i dettami di Eulero è necessariamente $(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = -1$, sarà anche necessariamente $(-1)^{\frac{n\,l.-1 - n\,l.1}{n\,l.1}} = -1$: ma secondo questi stessi dettami si ha $(-1)^{\frac{n\,l.-1-n\,l.1}{n\,l.1}} = (-1)^{\frac{l.1-l.1}{l.1}}$; dunque se $(-1)^{\frac{l.1-l.1}{l.1}}$; essendo l'esponente una frazione composta da [illegible] di quantità positive, può essere uguale a -1 non vedo perchè non possa essere anche $(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = -1$. Che se mi si domandi come ciò possa essere, accordo il dire, che allorchè l'esponente di una potenza è un numero rotto il di cui denominatore sia un numero pari; rappresentando questo l'esponente della radice, potrà la quantità essere positiva e negativa, come per esempio, se per la quantità $a^{\frac{m}{n}}$ altro non si intende che $\sqrt[n]{a^m}$; essendo n numero pari, sarà $a^{\frac{m}{n}} = \pm\sqrt[n]{a^m}$. Se adunque si può supporre, che $\frac{m}{n} = \frac{1}{l.1}$, cosicchè sia una frazione qualunque il di cui denominatore n sia un numero pari; e se per $(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = (-1)^{\frac{m\,l.-1-m\,l.1}{n}}$ altro non si intende, che $\sqrt[n]{(-1)^{m\,l.-1-m\,l.1}} = \sqrt[n]{(-1)^0}$; sarà $(-1)^{\frac{l.-1-l.1}{l.1}} = \pm 1$, secondo le condizioni della proposta equazione. Ma lasciando ora da parte il rifiuto, quale non so potrà essere del tutto soddisfacente, non si

maravigliato a ... che applicandomi al computo delle ... temporaneamente mi venga a dichiarar contrario all'idea del Sig.r Eulero; ma spero con pace di questo sovrano Geometra ponderato tutto ciò, che sono per dire. Si pone dall'autore l'equazione $a^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{la}} = \cos\frac{\pi\,la}{la} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi\,la}{la}$, quale certamente si è dall'autore Eulero dimostrato alla pag. 193 della sua introduzione all'Analisi essere $a^{y} = \left(1+\frac{y\,la}{i}\right)^{i}$; rappresentando i un numero infinito; ed alla pag. 104 della citata opera, essere $\cos v + \sqrt{-1}\,\sin v = \left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}$ rappresentando v un arco qualunque. Dalla prima equazione in fatti si dedurrà essere $a^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{la}} = \left(1+\frac{\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}$; e dalla seconda $a^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{la}} = \cos\pi + \sqrt{-1}\,\sin\pi$, come si suppone. Siccome però pretendo, che l'equazione $a^{y} = \left(1+\frac{y\,la}{i}\right)^{i}$ sia vera nel solo caso di y reale, ne verrà, che essendo y immaginaria erronea sarà l'equazione $a^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{la}} = \left(1+\frac{\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}$. Essendo adunque $a^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{la}} = \left(1+\frac{\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} = \cos\pi + \sqrt{-1}\,\sin\pi = -1$, sarà $a^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{la}} = \left(1+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} = \cos 2\pi + \sqrt{-1}\,\sin 2\pi = 1$: ma $\left(1+\frac{\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} = 1 + \pi\sqrt{-1} - \frac{i-1}{2i}\cdot\pi^2 - \frac{(i-1)(i-2)}{2i\cdot3i}\,\pi^3\sqrt{-1} + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{2i\cdot3i\cdot4i}\cdot\pi^4 + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2i\cdot3i\cdot4i\cdot5i}\cdot\pi^5\sqrt{-1} - \&c. = -1$, e $\left(1+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} = 1 + 2\pi\sqrt{-1} - \frac{i-1}{2i}\cdot2^2\pi^2 - \frac{(i-1)(i-2)}{2i\cdot3i}\cdot2^3\pi^3\sqrt{-1} + \&c. = 1$: dunque sì la prima serie de' termini, che la seconda deve essere tale, che le quantità positive immaginarie distruggano le negative immaginarie, acciò si possa almeno concepire la prima serie $=-1$, e la seconda $=1$. Essendo adunque i termini positivi immaginarii nella prima serie, $\pi\sqrt{-1} + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2i\cdot3i\cdot4i\cdot5i}\cdot\pi^5\sqrt{-1} + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)(i-7)(i-8)}{2i\cdot3i\cdot4i\cdot5i\cdot6i\cdot7i\cdot8i\cdot9i}\cdot\pi^9\sqrt{-1} + \&c.$ e i termini negativi immaginarii $\frac{(i-1)(i-2)}{2i\cdot3i}\cdot\pi^3\sqrt{-1} + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)}{2i\cdot3i\cdot4i\cdot5i\cdot6i\cdot7i}\cdot\pi^7\sqrt{-1} + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)(i-7)(i-8)(i-9)(i-10)}{2i\cdot3i\cdot4i\cdot5i\cdot6i\cdot7i\cdot8i\cdot9i\cdot10i\cdot11i}\cdot\pi^{11}\sqrt{-1} + \&c.$, dovrà darsi uguaglianza tra questi termini. Supponendosi in tutti questi computi il raggio $=1$, ed essendo la periferia al diametro in una ragione minore di 22:7, sarà π minore di $\frac{22}{7}$; ma dunque il primo termine positivo ed immaginario $\pi\sqrt{-1}$ sarà minore del primo termine negativo $\frac{(i-1)(i-2)}{2i\cdot3i}\cdot\pi^3\sqrt{-1}$: il secondo positivo maggiore del secondo negativo, il terzo positivo maggiore del terzo negativo, e così successivamente. Acciò adunque si possa dare uguaglianza tra i termini positivi e negativi, sarà necessario che la maggioranza del primo termine negativo sopra il primo termine positivo, sia esattamente compensata dalla maggioranza de' termini positivi sopra i corrispondenti negativi. Supponendosi ora a motivo di i infinito essere $i-1$, $i-2$, $i-3$ &c. $= i$; qual supposizione non può pregiudicare le conseguenze, da dedursi; sarà il primo termine negativo al primo positivo come $\pi^2 : 6$, ed il secondo positivo al secondo negativo come $6 \cdot 7 : \pi^2$, ed il terzo positivo al terzo negativo come $10 \cdot 11 : \pi^2$ e così successivamente. Se ora si ricorra alla formola $\left(1+\frac{n\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i$, quale secondo Eulero deve essere reale, come che uguale all'unità si troverà, che i termini positivi, e negativi immaginarii non differiscono dalli esposti, se non che il n, in tutti i termini sarà elevato a quel grado di potenza a cui è elevato π; onde sarà il primo termine negativo immaginario al primo positivo immaginario come $n^2\pi^2 : 6$, il secondo positivo al secondo negativo come $6 \cdot 7 : n^2\pi^2$ il terzo positivo al terzo negativo come $10 \cdot 11 : n^2\pi^2$ e così in seguito. Essendo adunque nella formola $\left(1+\frac{n\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ maggiore la differenza che passa tra il primo termine negativo immaginario, ed il primo positivo, e minore la differenza, che passa tra il secondo, terzo, quarto &c. positivo, ed i corrispondenti negativi immaginarii, di quello che sia nella formola $\left(1+\frac{\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i$: se si accordi, che in questa formola i termini positivi immaginarii distruggono i negativi immaginarii; questo sarà impossibile nella formola $\left(1+\frac{n\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i$. Senza però aver ricorso alli esposti raggionamenti, secondo me molto validi contro i sentimenti dell'Eulero, altra ancora ne posso addurre, e generalmente dimostrare, che $\left(1+\frac{\lambda\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ sarà sempre una quantità immaginaria essendo λ qualunque intero numero positivo, o negativo. Per dimostrar ciò rifletto in primo luogo, che nelle due esposte equazioni $a^y = \left(1+\frac{y\,la}{i}\right)^i$ e $\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i = \cos. v + \sqrt{-1}\,\text{sen}. v$, benchè i rappresenti l'infinito, e benchè molte volte Eulero rappresenti l'infinito per $\frac{1}{0}$: nelle circostanze delle due esposte equazioni, intenda per i una quantità espressa da una qualunque frazione, il di cui denominatore sia minimo quanto uno vole, ma non mai uguale a zero. Ed in fatti se le due equazioni si verificassero nell'ipotesi di $i = \frac{1}{0}$, si potrebbe dedurre dalla prima $i a^{\frac{y}{i}} - i = y\,la = i a^0 - i = 0$, il che è falso; e dalla seconda $(\cos. v + \sqrt{-1}\,\text{sen}. v)^{\frac{1}{i}} \times i - i = \left(\cos. \frac{v}{i} + \sqrt{-1}\,\text{sen}. \frac{v}{i}\right) \times i - i = (\cos. 0 + \sqrt{-1}\,\text{sen}. 0) \cdot i - i = i - i = v\sqrt{-1}$; qual cosa non si può verificare, se non nella sola ipotesi di $v = 0$. Da tutto ciò adunque è manifesto, che se sono vere le equazioni $a^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{la}} = \left(1+\frac{n\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i = -1$ ed $\left(1+\frac{2n\pi\sqrt{-1}}{i}\right)^i = a^{\frac{2n\pi\sqrt{-1}}{la}} = 1$, dipendendo queste dalle due ora esposte si verificheranno anche nell'ipotesi di i uguale ad una frazione il di cui denominatore sia minimo quanto uno vole, ma non mai zero. Premesse queste cose risolvo il seguente problema. Data una quantità qualunque immaginaria determinare l'esponente della potenza alla quale elevata la quantità divenga reale

dipendendo per premettere qualunque sia $A + B\sqrt{-1}$ = positiva essendo $+\sqrt{A^2+B^2}$ $(\cos. p - \sqrt{-1}$ $(\cos. p \pm \sqrt{-1}$ $\sqrt{A^2+B^2}$ e negativa $= (\cos. \lambda)$ e negativa terminata dalla po. $A+B\sqrt{-1}$, nostra e semiperif. $\sqrt{-1}\,(\text{sen}. \lambda)$ reale, [illegible] il seno [illegible] il [illegible] ondo con [illegible] $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}}$ purchè [illegible] zero, [illegible] il seguente [illegible] un numero generalmente negativo [illegible] $+\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}$ $\mp \sqrt{-1}\,\text{sen}.$ [illegible] al zero dovrà [illegible] nità immag.

Si prenda la nostra formola generale $(A+B\sqrt{-1})$ delle quantità immaginarie. Nel raggio del circolo l'unità, esprimendo $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ il coseno, e $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ il seno di un arco qualunque, da determinarsi facilmente essendo dato il seno. Sia dunque questo arco p, e si avrà $A=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos p$, $B\sqrt{-1}=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sin p$, onde essendo A, B, quantità ambedue positive o negative, sarà $(A+B\sqrt{-1})=(\cos p+\sqrt{-1}\cdot\sin p)\pm\sqrt{A^2+B^2}$; essendo A positiva, B negativa, sarà $(A+B\sqrt{-1})=(\cos p-\sqrt{-1}\cdot\sin p)\cdot+\sqrt{A^2+B^2}$; e finalmente essendo A negativa, B positiva, sarà $(A+B\sqrt{-1})=(\cos p-\sqrt{-1}\cdot\sin p)\cdot-\sqrt{A^2+B^2}$. Generalmente adunque sarà $A+B\sqrt{-1}=(\cos p\pm\sqrt{-1}\cdot\sin p)\cdot\pm\sqrt{A^2+B^2}$: onde $(A+B\sqrt{-1})^{\frac{\lambda\pi}{p}}=(\cos p\pm\sqrt{-1}\cdot\sin p)^{\frac{\lambda\pi}{p}}\cdot\pm\sqrt{A^2+B^2}^{\frac{\lambda\pi}{p}}$; intendendo per λ qualunque numero intero positivo o negativo, o zero, e per π la semiperiferia: ma $(\cos p\pm\sqrt{-1}\cdot\sin p)^{\frac{\lambda\pi}{p}}=(\cos\lambda\pi\pm\sqrt{-1}\cdot\sin\lambda\pi)=\pm 1$ essendo λ zero, o numero pari positivo o negativo; $=-1$ essendo λ dispari positivo o negativo: dunque determinato che sia l'arco p, infiniti saranno gli esponenti $\frac{\lambda\pi}{p}$ della potenza, alla quale elevata la quantità immaginaria $A+B\sqrt{-1}$, si avrà una quantità reale. Si discenda ora al nostro caso particolare, e si supponga, essendo 1 il raggio, π la semiperiferia, i l'infinito, avremo la formola $(1+\frac{\lambda\pi\sqrt{-1}}{i})^i=(\cos\lambda\pi\pm\sqrt{-1}\cdot\sin\lambda\pi)=\pm 1$. Paragonando la presente formola con la generale, sarà $1=A$, $B=\frac{\lambda\pi}{i}$, $i=\frac{\lambda\pi}{p}$; il coseno dell'arco $p=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}}$ e il seno $=\frac{\lambda\pi}{i\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}}$. Tutto adunque si riduce a dimostrare se il seno, e il coseno dell'arco p possano conciliarsi con $i=\frac{\lambda\pi}{p}$, onde con $p=\frac{\lambda\pi}{i}$. Essendo però essendo $\frac{\lambda\pi}{i\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}}$ il seno, e il coseno $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}}$, la tangente è $\frac{\lambda\pi}{i}$; e l'arco benchè minimo purchè non sia zero, è sempre minore della corrispondente tangente; ne verrà in conseguenza, che purchè $\frac{\lambda\pi}{i}$ non sia zero, l'arco p sarà prossimo quanto mai a $\frac{\lambda\pi}{i}$, nè con esattezza potrà supporsi eguale a $\frac{\lambda\pi}{i}$, se non nel caso di $\frac{\lambda\pi}{i}=0$. Con tutto il rigore adunque si potrà supporre $p=\frac{n\lambda\pi}{i}$, rappresentando n un numero quanto si vuole prossimo all'unità: onde essendosi generalmente dimostrato nella supposizione di A positiva, e di B negativa o positiva $(A+B\sqrt{-1})=(\cos p\mp\sqrt{-1}\cdot\sin p)\cdot+\sqrt{A^2+B^2}$ fatte le necessarie sostituzioni si avrà $(1+\frac{\lambda\pi\sqrt{-1}}{i})=(\cos\frac{n\lambda\pi}{i}\mp\sqrt{-1}\cdot\sin\frac{n\lambda\pi}{i})\cdot+\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}$: onde $(1+\frac{\lambda\pi\sqrt{-1}}{i})^i=(\cos n\lambda\pi\mp\sqrt{-1}\cdot\sin n\lambda\pi)\cdot+\sqrt{1+\frac{\lambda^2\pi^2}{i^2}}^{\,i}=\cos n\lambda\pi\mp\sqrt{-1}\cdot\sin n\lambda\pi$, e quale è una quantità immaginaria; mentre per quanto $\mp\sin n\lambda\pi$ rappresenti una quantità prossima quanto si vuole al zero, essendo moltiplicata per l'immaginario $\sqrt{-1}$, e non essendovi gradi nell'immaginario, o impossibile, basterà soltanto, che $\sin n\lambda\pi$ non sia zero, per poter concludere essere $\mp\sqrt{-1}\cdot\sin n\lambda\pi$ quantità immaginaria, onde anche immaginaria $\cos n\lambda\pi\mp\sqrt{-1}\cdot\sin n\lambda\pi$. Che sì benchè $\mp\sqrt{-1}\cdot$ Sen: $n\lambda\pi$ sia una quantità quanto mai prossima al zero moltiplicata per l'immaginario, ciò non ostante con ogni ragione si pretenderà essere Cos: $n\lambda\pi \mp \sqrt{-1}\cdot$ Sen: $n\lambda\pi$ quantità reale $=\pm 1$, per lo stesso motivo sarà reale la quantità $\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i = 1$; rispetto essendo i l'infinito e v un arco minore di π: ora è certo, che una quantità reale non può mai mutar natura, e divenir immaginaria, benchè si prenda infinite volte: onde come Cos: $n\lambda\pi$ $\mp\sqrt{-1}\cdot$ Sen: $n\lambda\pi$), per essere eguale a ± 1, elevata anche alla potenza infinita i, è reale, perchè essendo (Cos: $n\lambda\pi \mp \sqrt{-1}\cdot$ Sen: $n\lambda\pi)^i$ = (Cos: $n i \lambda\pi \mp \sqrt{-1}\cdot$ Sen: $n i \lambda\pi) = (\pm 1)^i$: così essendo $\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)$ quantità reale come la $= 1$, dovrebbe essere anche quantità reale $\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$, come $= (1)^i$, onde non eguale a Cos: $v + \sqrt{-1}\cdot$ Sen: v, come si pretende dal Eulero; mentre essendo v minore di π, senza contrasto alcuno, la quantità Cos: $v + \sqrt{-1}\cdot$ Sen: v è immaginaria.

Non volendo, la presente lettera vi è estesa oltre i confini del dovere: compatitemi adunque e degnatevi riflettere, che essendo voi senza ombra di adulazione uno dei luminari dell'Analisi, rincrescer non vi deve, che a voi si ricorra come ad un oracolo per ottenere risposta nelle cose più recondite, e più sublimi di questa scienza.

Io sono con la più perfetta stima e rispetto

Di V.S. Ill.ma

Roma 21 Febbraro 1781

Umilissimo ed Obbligatissimo Servo
Giuseppe Calandrelli

Un homme sage, et qui s'est bien instruit autour de Versailles, que la triste catastrophe de Linguet ne doit plus passer pour un problème. Si elle est vraie, ce misérable a publié plus véritablement qu'il ne croit: [illegible]

J'envoie, par le courrier d'aujourd'hui, ces 6 mauvais vers, à celui qui m'apprend cette nouvelle, déjà répandue depuis quelque temps:

Le trop fameux Linguet, et l'insigne Villon,*
Tous deux nourris de trahison,
Éprouvent un destin semblable:
Par ordre de Thémis, un funeste cordon,
(Digne et juste loyer de leur crime exécrable,)
Tous deux les fait descendre au manoir de Pluton.

* Il fut accusé du crime de fausse monnaie.

A Monsieur

Monsieur D'Alembert, de l'Académie
Royale des sciences, Secrétaire
Perpétuel de l'Académie Françoise.

A Paris.