# Lettre de Euler Leonhard à D'Alembert, 20 décembre 1763

**Auteur : Euler Leonhard**

## Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

8 Fichier(s)

## Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

## Informations sur le contenu de la lettre

Incipit... Je me suis appliqué ces jours à examiner mes recherches...
RésuméConditions de validité de sa solution fonctionnelle des cordes vibrantes. Objections de D'Al. et discontinuités. Ses travaux et ceux de Lagrange sur le son. Circulation de l'eau et de l'air chauds, construction de fourneaux.
Date restituée[20 décembre 1763]
Justification de la datationrésumé dans les Opuscules, t. IV, p. 162 qui datent la l.
Numéro inventaire63.86
Identifiant658
NumPappas509

## Présentation

Sous-titre509
Date1763-12-20
Mentions légales



Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

## Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreNon renseigné
Publication de la lettreEuler, O. O., IV A, 5, p. 324-327
Lieu d'expéditionBerlin
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

## Information générales

LangueFrançais
Sourcecopie incomplète, 8 p.
Localisation du documentBasel UB, Ms. L Ia 689, f. 168-171

## Description & Analyse

Analyse/Description/Remarquesrésumé dans les Opuscules, t. IV, p. 162 qui datent la l.
Auteur(s) de l'analyserésumé dans les Opuscules, t. IV, p. 162 qui datent la l.
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

---

 20 décembre 1763

Lettre à M. Euler de M. Dalembert. 7

Je me suis appliqué ces jours
à examiner mes recherches

sur le mouvement des cordes et j'y trouve en effet
quelques limitations absolument necessaires sans
lesquelles ma solution ne sauroit avoir lieu.
Soit AB la corde en question fixée dans les points
A et B laquelle ait été forcée au commencement
de son état naturel dans la situation AQB d'où
étant subitement relachée, il s'agit de determiner
le mouvement qu'elle aura dans la suite à chaque
instant.
Pour entreprendre la Solution de cette question on
est obligé de faire les deux suppositions suivantes,
1° que la longueur de la courbe AQB ne differe
qu'infiniment peu de la droite AB et 2° que le
mouvement de chaque point Q se fasse constamment
sur l'appliquée QP et qu'on puisse regarder l'arc AQ
comme egal à l'abscisse AP. Pour satisfaire à
ces 2 conditions il ne suffit pas que toutes les
appliquées QP soient infiniment petites mais il

169
7

faut outre cela, que les tangentes à chaque point
l faßent des angles infiniment petits avec l'axe AB.
Donc toutes les fois que la courbe ADB qu'on aura
donnée d'abord à la corde, n'est pas d'accord avec ces
deux conditions, la solution que le calcul fondé
sur ces mêmes conditions fournira, ne sauroit
manquer d'être fausse. Il faut donc exclure toutes
les courbes ADB, où ces 2 conditions ne sauroient
avoir lieu, quand même leur equation pourroit
être exprimée par une suite de sinus. Mais toutes les
fois que cette courbe initiale ADB sera telle que
les 2 conditions rapportées lui conviennent, je
crois que ma solution, que j'en donnerai sera juste,
et que toutes les objections qu'on y pourroit faire,
ne tombent que sur de telles courbes initiales, auxquelles
j'ai deja donné l'exclusion avant que d'entreprendre
la solution. Il me semble que toute ligne AMB tirée
de A en B pourvu qu'elle n'ait nulle part une tangente
perpendiculaire à l'axe AB, puisse fournir une courbe
ADB doué des 2 dites propriétés, en diminuant les

appliquées PM à l'infini selon
un même rapport, desorte que
$PZ = \alpha . PM$, la lettre $\alpha$ marquant

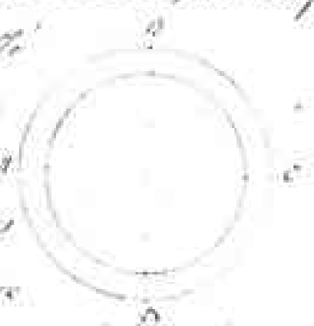

une fraction extremement petite. Car alors non
seulement toutes les appliquées PZ seront quasi
infiniment petites mais aussi toutes les tangentes
seront infiniment peu ~~appliquées~~ inclinées à l'axe AB. D'où
l'on comprend aussi reciproquement qu'ayant donné
au commencement à la corde AB une telle figure
AZB, dans le mouvement suivant le point Z se
mouvra necessairement sur l'appliquée ZP ou ce
qui revient au même, ne s'en écartera qu'infiniment
peu. Supposons donc qu'on ait reduit d'abord la
corde AB à une telle figure AZB d'où elle soit
relachée subitement, desorte que dans ce moment
le mouvement ait été partout nul et l'on demande
le mouvement de la corde pour chaque moment
suivant. Pour cet effet posant l'abscisse $AP = x$ et
l'appliquée de la courbe initiale $PZ = q$ soit AYB
la figure de la corde après un
tems quelconque $= t$ et posons

les intervalles $QT = Qt = ct$. et il est clair puisque $QR = y = \Gamma : x$ on aura $TV = \Gamma : (x+ct)$ et $tu = \Gamma : (x-ct)$ donc $y = \frac{1}{2}TV + \frac{1}{2}tu$. desorte que par ce moyen on pourroit


assigner pour un tems écoulé quelconque $t$ le lieu du point de la corde, qui au commencement a été en $Q$ pourvû que les points $T$ et $t$ ne tombassent hors l'étendue de la corde $AB$. au moins jusques là cette construction ne sauroit manquer. Tout revient donc à montrer comment cette courbe $AuB$ doit être continuée au delà des points $A$ et $B$ pour que ces continuations soient conformes à la nature de la question. Or d'abord il est clair que les deux points de la corde $A$ et $B$ demeurent toujours immobiles. Donc prenant le point $Q$ en $A$, après le tems $t$ on connoît bien l'appliquée $TV$ à la droite, il faut donc absolument que celle à la gauche $tu$ lui soit égale mais négative. il en est de même de l'autre terme $B$ au delà duquel à la droite les appliquées doivent être égales et négatives à celles de la gauche. Voilà donc

la même construction que j'ai donnée autrefois mais
déduite ici de l'analyse d'une manière plus naturelle
et qui à mon avis ne laisse aucun doute. Quant aux
objections que vous avez faites autrefois contre cette
construction en faisant voir plusieurs inconvéniens,
si l'on pouvoit donner à la corde une figure initiale
quelconque, je suis parfaitement de votre sentiment
Monsieur, mais je ne crois pas que ces inconvéniens
portent la moindre atteinte à ma solution, puisque
tous ces cas doivent être écartés avant que la solution
y puisse être appliquée. D'ailleurs il me semble que la
considération de telles fonctions, qui ne sont assujetties
à aucune loi de continuité, nous ouvre une carrière
tout à fait nouvelle dans l'analyse, dont nous voyons
déja un exemple fort remarquable dans la propagation
du son. La manière dont M. de la Grange et moi ensuite
avons traité cette matière étoit bien un peu embarrassée
mais ayant examiné de nouveau ces recherches j'ai trouvé
moyen de les mettre dans un tel jour que personne ne
pourroit plus douter de la justesse du calcul.

Voila, encore un cas bien singulier, soit un tuyau circulaire ABCD dans une situation verticale, et rempli d'eau, si en A soit ce tuyau bien echauffé de sorte que le degré de chaleur soit en A le plus grand et en C le plus petit, & par consequent la densité en A la plus petite et en C la plus grande. A cause de cette inegalité il est impossible que l'eau dans ce tuyau soit en equilibre, mais si elle a été en repos elle commencera aussitôt à se mouvoir, qu'en bas elle coule vers le lieu chaud A et en haut vers le lieu froid C, ou bien il s'y engendrera un mouvement dans le sens ABCD, ce mouvement sera acceleré tant que l'inegalité de chaleur de l'eau subsiste; ce même phenomene doit aussi arriver, quand le tuyau n'est rempli que d'air; je crois que c'est la raison pourquoi l'air monte continuellement par la cheminée. Je pense aussi que si l'on pratiquoit dans la muraille d'une chambre un tel tuyau (ou circulaire ou quarré) et qu'on y fit en A un feu; l'air par son mouvement de circulation seroit capable d'entretenir le feu, sans qu'on ait besoin d'y appliquer une cheminée



pour la même abscisse $AP = x$ l'appliquée $PY = y$ qui sera une certaine fonction des 2 variables $x$ et $t$ dont la nature doit donc être renfermée dans cette equation $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{cc}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ dont l'integrale complette est sans contredit $y = \Gamma(x+ct) + \Delta(x-ct)$ tout revient donc à trouver la nature de ces deux fonctions de l'etat initial donné, qui renferme deux conditions, l'une que posant $t=0$, $y$ devienne $y=q$ et la seconde, que la vitesse qui est en general $-\left(\frac{dy}{dt}\right)$ s'evanouisse. Pour arriver à une construction plus commode, je supposerai en general $y = \frac{1}{2}\Gamma(x+ct) + \frac{1}{2}\Delta(x-ct)$ d'où il s'ensuit la vitesse $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}\Gamma'(x+ct) - \frac{c}{2}\Delta'(x-ct)$ soit donc $t=0$ et j'aurai ces deux equations $q = \frac{1}{2}\Gamma x + \frac{1}{2}\Delta x$ et $0 = \Gamma' x - \Delta' x$ dont celle-ci me donne d'abord $\Delta' x = \Gamma' x$ et partant $\Delta x = \Gamma x$ par consequent $\Gamma x = \Delta x = q$ de sorte que la courbe initiale elle même AQB represente la nature de l'une et de l'autre fonction dont j'ai besoin. et j'aurai $y = \frac{1}{2}\Gamma(x+ct) + \frac{1}{2}\Gamma(x-ct)$. Donc pour le temps écoulé $= t$, qu'on prenne du point P de part et d'autre

peut être même que la fumée étant conduite
de nouveau dans le feu y sera entièrement consumée
(on trouve déja un tel exemple dans le 1. vol. des transact.)
si cela réussiroit ce seroit sans doute la plus avanta-
geuse construction des fourneaux, puisque toute la
chaleur demeureroit renfermée dans le tuyau; je
remarque seulement que faisant le tuyau plus
large en bas qu'en haut, la circulation
devient plus rapide.