Lettre de Euler Leonhard à D'Alembert, 15 avril 1747

Expéditieur(s) : Euler Leonhard

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

3 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Citer cette page

Euler Leonhard, Lettre de Euler Leonhard à D'Alembert, 15 avril 1747, 1747-04-15

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 05/12/2025 sur la plate-forme EMAN :
https://eman-archives.org/dalembert/items/show/230

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitIl est bien vrai que l'exemple de la courbe y=?x+?x?(x+a)...
RésuméRép. à la l. du 24 mars 1747. Log. hyperboliques, log. de négatifs, racines de l'unité. Jugement d'Euler sur le mém. de D'Al. sur la Lune et l'établissement de tables.
Justification de la datationNon renseigné
Numéro inventaire47.04
Identifiant626
NumPappas17

Présentation

Sous-titre17
Date1747-04-15
Mentions légales

- Fiche : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN

- Numérisation : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG).

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreLateX
Publication de la lettreEuler, O. O., IV A, 5, p. 263-267
Lieu d'expéditionBerlin
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

Information générales

LangueFrançais
Sourceautogr., d.s., « Berlin », adr., cachet rouge, 4 p.
Localisation du documentParis Institut, Ms. 880, f. 20-21

Description & Analyse

Analyse/Description/RemarquesNon renseigné
Auteur(s) de l'analyseNon renseigné
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

April 1747 – Dec 1770

A M. D'Alembert.

Monsieur.

Il est bien vrai que l'exemple de la courbe $y = \sqrt{x}$ [illegible], qui perd dans le cas $x = 0$ subitement toute une moitié, ne prouve pas que la même chose doive arriver dans la courbe $y = \frac{x}{n+1} - \frac{x}{(n-1)(x^n-1)}$ au cas $n = 1$. aussi ne me suis-je pas servi de cet exemple, que pour prouver la possibilité d'une telle [illegible] dans un certain cas. et je ne [illegible] que cette conclusion, que quoique la [illegible] est toujours un diamètre, quand n est un nombre [illegible], [illegible] cette conséquence puisse être [illegible] d'être vraie au cas $n = 1$. Par ce moyen il me semble que j'ai bien répondu à Votre objection tirée de cette formule générale, quoique ce cas ne prouve rien pour ma thèse. car d'abord je n'étois obligé de faire voir, que les arguments qu'on allègue pour prouver la réalité des logarithmes des nombres négatifs, n'étoient pas trop forts. Mais il me semble que ma théorie ne manque pas de preuves positives, mais avant que de les alléguer, il faut répondre à Votre objection fondée sur l'équation $y = c^x$, où Vous posez que le nombre c puisse avoir également une valeur affirmative et négative; je conviens même que sa valeur est tout à fait arbitraire, car si Vous mettez $c = 10$, supposant x sera le logarithme commun ou tabulaire du nombre y, et si $c = 2{,}71828$ etc. ou $c = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$ etc. x sera le logarithme hyperbolique du nombre y. Mais dès qu'on assigne au nombre c une valeur déterminée, le système des logarithmes de tous les nombres sera déterminé. [illegible] l'équation $y = c^x$, et comme c est aussi bien [illegible] deux valeurs différentes que la courbe dont l'équation [illegible] paramètre, on ne pourra pas lui donner en même temps deux valeurs différentes. De même que l'équation parabolique $yy = ax$, si l'on donnoit à a une double valeur par exemple $a = +1$ et $a = -1$, on auroit deux courbes différentes, qui ne seroient plus jointes par le lien de la continuité. Cela posé il me semble fort clair, que posant $c = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$ etc.

les logarithmes des nombres negatifs doivent être impossibles, [illegible] est impossible de trouver une telle valeur de x, que e^x ou $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}$ etc. devienne une valeur negative. Il vous paroit paradoxe que les differentielles de ly et $l-y$ soient les mêmes, mais vous avouerez pourtant cette égalité dans un sens plus general c. à d. que $d.ly = d.lay$, quelque nombre [illegible] que soit a, pourquoi ne le pourroit-on pas dans le cas dont je me sers la moindre difficulté. [illegible] que $l-1=0$, vous prouvez $x=-1$. Par le raisonnement que vous prouvez, que $l-1=0$, vous aurez également que $l\sqrt{-1}=0$, car puisque $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$, $l\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}=l-1$, c. à d. $2l\sqrt{-1}=l-1=\frac{1}{2}l1$ et partant $l\sqrt{-1}=\frac{1}{4}l1=0$. Vous accorderez donc, que le premier et si vous n'approuvez pas ce raisonnement, vous conviendrez d'abord, que les logarithmes [illegible] n'est plus convaincant. Or vous savez comme moi, que les logarithmes des nombres imaginaires ne sont pas réels, sans cela cette expression $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\alpha$, et $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ ne sauroit exprimer la quadrature du cercle. Si donc $l\sqrt{-1}$ est $=\alpha\sqrt{-1}$ c. à d. à une quantité imaginaire. Ensuite comme vous avez $l\sqrt{-1}=\alpha\sqrt{-1}$ c. à d. [illegible] pourquoi ne le seroit pas $2l\sqrt{-1}=l-1$ est imaginaire, pourquoi ne le seroit pas [illegible] Vous auriez $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=l1=0$ suivant votre raisonnement [illegible] que $l1$ et $l-1$ et $l\sqrt{-1}$ et $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=1$, suivant votre raisonnement seroit aussi $=0$, que même $l-1$ devroit être le logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ seroit aussi $=0$, ce qui n'est pas soutenable. Mais vous m'opposerez, que même $l1$ étant $=2l-1=4l\sqrt{-1}=3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ etc. or c'est justement ce que je veux, car je dis que $l1$ a une infinité de valeurs différentes parmi lesquelles il y a une $=0$, et toutes les autres sont imaginaires. Pour mieux expliquer cela, soient $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. les logarithmes de l'unité, et je dis que les valeurs de $l-1$ seront $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}, \frac{\delta}{2}$ etc. On trouve parmi toutes ces valeurs [illegible] que la moitié de chacune de toutes imaginaires, de sorte pourtant que le double de chacune se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Mais il ne s'en suit pas que la moitié de chacune des valeurs de $l+1$ se trouve parmi les $l-1$, puisque -1 n'est qu'une valeur de $\sqrt{+1}$, l'autre étant $+1$, dont les logarithmes sont $\frac{0}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ [illegible] $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. car $\frac{\beta}{2}=\alpha$, $\frac{\delta}{2}=\beta$, qui sont justement les mêmes que $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. Pareillement comme les trois racines cubiques de 1 sont $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, les logarithmes de ces trois racines seront $\frac{\gamma}{3}=\beta$, $\frac{\delta}{3}=\ldots$ etc.

$l1 = \frac{\alpha}{1}, \frac{\beta}{1}, \frac{\gamma}{1}, \frac{\delta}{1}, \frac{\varepsilon}{1}$ etc. les mêmes que $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc.

$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \ldots$ etc.

$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \ldots$ etc. ne sont pas fondées sur une pure conjecture et ces lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. ne marquent [illegible] les véritables valeurs. J'ai [illegible] que si [illegible] d'un cercle dont le rayon est $= 1$, et les valeurs [illegible] π la circonférence [illegible] $\pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}, \pm 6\pi\sqrt{-1}$ etc.

De $l1$ sont $0, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}, \pm 6\pi\sqrt{-1}$ etc.

De $l-1$ sont $\pm \pi\sqrt{-1}, \pm 3\pi\sqrt{-1}, \pm 5\pi\sqrt{-1}$ etc. [illegible]

Et en général j'ai trouvé [illegible] $= \pi(\ldots)\sqrt{-1}$ où m et n marquent des nombres entiers tant affirmatifs que négatifs quelconques. Par ce moyen toutes les difficultés disparoissent tout à fait, qu'on ne sauroit lever en aucune manière, si l'on vouloit soutenir les logarithmes des nombres négatifs [illegible] raisonnement, puisque [illegible] $= l1 = 0$ [illegible] se fondant que $l\sqrt{-1} = 0$ et [illegible] le nombre on seroit obligé de dire que, quoique [illegible] marque [illegible]

Vous déterminez ailleurs [illegible] y puisse être tant affirmatif que négatif [illegible] etc. je crois d'y répondre ici la valeur de cette série [illegible] jamais plus qu'une valeur, et cela [illegible] que [illegible] une fonction ou [illegible] l'affirmative, quand même [illegible] la formule est équivoque.

Votre pièce sur le mouvement de la lune est fondée sur [illegible] calculs les plus difficiles y a [illegible] dans les calculs [illegible] tables astronomiques [illegible] l'application de l'analyse à l'usage des tables [illegible] approximations faciles pour le calcul, n'étoit pas [illegible] ce problème [illegible] il s'agit [illegible] approximations. En ayant manié cette question [illegible] trop propre [illegible] je n'ai trouvé qu'un seul chemin [illegible] quantités [illegible] calculé mes tables [illegible] astronomiques, duquel j'ai aussi [illegible] de la lune. Je suis [illegible] d'autant plus curieux de voir la suite de vos recherches sur cette matière, ayant l'honneur d'être avec la plus grande considération

Monsieur

Berlin ce 15 Avril 1747.

Votre très humble et très obéissant serviteur L. Euler