Lettre de D'Alembert à Euler Leonhard, 26 mai 1747

Expéditieur(s) : D'Alembert

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

6 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Citer cette page

D'Alembert, Lettre de D'Alembert à Euler Leonhard, 26 mai 1747, 1747-05-26

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 16/12/2025 sur la plate-forme EMAN :
https://eman-archives.org/dalembert/items/show/461

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitJ'ai lu avec autant de fruit que de reconnaissance la lettre que vous m'avez fait l'honneur...
RésuméRép. à la l. du 15 avril 1747. Commente les objections d'Euler sur les log. de négatifs qui l'ont ébranlé. Discussion sur fonction et série. Annonce un mém. sur l'application de sa théorie de la Lune [voir O.C. D'Al, I/6, « Introduction »].
Date restituée26 [mai] 1747
Justification de la datationvoir n. [1].
Numéro inventaire47.05
Identifiant636
NumPappas18

Présentation

Sous-titre18
Date1747-05-26

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreLateX
Publication de la lettreEuler, O. O., IV A, 5, p. 267-269
Lieu d'expéditionParis
DestinataireEuler Leonhard
Lieu de destinationBerlin
Contexte géographiqueBerlin

Information générales

LangueFrançais
Sourceautogr., d.s., « à Paris », adr. à Berlin, traces cachet noir, 5 p.
Localisation du documentSaint-Pétersbourg AAN, 136/op2/2, f. 247-249

Description & Analyse

Analyse/Description/RemarquesNon renseigné
Auteur(s) de l'analyseNon renseigné
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

---

a Mr Euler

[illegible]

Monsieur [illegible]

[illegible]

J'ay lu avec autant de fruit que de reconnoissance la lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire le 15 du mois dernier au sujet des logarithmes des quantités negatives. La necessité de mediter ~~[illegible]~~ cette matiere avant que de vous repondre, jointe à differentes occupations, ~~m'a empeché~~ d'avoir l'honneur de vous en remercier plutôt. je dois avouer, Monsieur, que vos observations sur mes objections m'ebranlent fort, ~~[illegible]~~ que s'il s'agissoit icy d'une affaire a decider par des Pairs, je jugerois contre moy pourtant, et j'aurois bien des raisons pour cela : cependant ~~[illegible]~~ [illegible] que j'ay osé combattre votre sentiment, je prendray la liberté de vous proposer ~~[illegible]~~ quelques reflexions qui font que je ne vois pas encore bien clairement la verité de ce que vous avancés.

1°. Je vous avois objecté que si $x = \frac{1}{2}$, c^x a deux valeurs, l'une positive, l'autre negative ; vous repondés à cela que c^x marque la valeur de la serie $1 + x + \frac{x^2}{1.2}$ &c. Par quelle raison ~~[illegible]~~ voulés vous reduire cette quantité en serie ~~[illegible]~~ ! vous savés que la reduction des quantités en series, exprime souvent leur valeur d'une maniere tres fau[tive] lorsque la serie est divergente, et que d'ailleurs les reductions en series expriment fort imparfaitement les valeurs des quantités radicales différentes, mais sans reduire e^x en suite, ne pouvons en avoir la valeur [illegible] si on nomme a l'ordonnée qui repond à $x = 0$, la valeur de e^x lorsque $x = \frac{1}{2}$ ne sera autre chose que la moyenne proportionnelle entre e & a, c'est à dire $\sqrt{ea}$, qui me paroit avoir deux valeurs. D'ailleurs si vous resolvez e^x en suite, pourquoy ne resoudriez vous pas de meme en suite log. x? & cela posé, vous trouveriez pour log. $-x$ une valeur réelle. J'avoüe cependant que cette objection ne tombe que sur la reduction en suites que vous prenés pour principe contre moy. c'est à dire que la reduction de log. x en suite est necessaire pour que log. $-x$ soit réelle. Vous m'objecterez peut-etre, Monsieur, que si il y a des valeurs de x aux quelles repondent deux valeurs de e^x, il y en a aussy d'autres, comme $x = 2$, auxquelles il ne repond [illegible] qui sera $\frac{e^2}{a}$, de sorte que la logarithmique auroit des ordonnées [illegible] per saltum & par intervalles, ce qui seroit absurde: mais je repondrai à cela que la valeur de e^x etant double dans certains cas, [illegible] pour un parametre, c'est une marque ce me semble, que e n'est point un parametre veritable, comme le parametre de la parabole, mais seulement l'ordonnée qui repond à $x = 1$, & que cette ordonnée a deux valeurs l'une positive, l'autre negative, aussi bien que a; or cela posé $\frac{e^2}{a}$ aura deux valeurs, & il n'y aura point de valeur de x à laquelle il ne reponde deux ordonnées egales & de signes contraires. En effet comme j'ay eu l'honneur de vous l'écrire, la formule e^x est proprement $\frac{c^{\frac{x}{g}}}{a^{\frac{x}{g}-1}}$; & supposant que c soit un parametre comme vous le voulés, on pourra toujours trouver une valeur de x qui differe de g de moins que quantité donnée & à laquelle repondront deux valeurs: il suffit pour cela que x soit à g comme un nombre pair à un nombre pair & [illegible] que $\frac{x}{g}$ ne soit pas un nombre entier. On aura donc une valeur de x aussy peu difformule qu'on voudra de q, et à laquelle repondent deux valeurs, ... et ... de conclure que $x = 1$ donne deux valeurs de z, surtout lorsque par la nature de la courbe z n'indique point un parametre arbitraire et constant ... reponde à $x = 1$ ou q, & qu'on n'est pas le maitre de supposer unique.

... multiplication de $-1 \times -1 = 1$ que par la même raison $\sqrt{1}$ ... devroient avoir zero pour logarithmes, et c'est dites vous, ce qui n'est pas soutenable. ... cette observation par l'analogie ingenieuse que vous ... dans les logarithmes de 1 & de -1; qui est telle que les logarithmes de -1 sont imaginaires aussi bien que ceux de $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; et vous dites que ... de ce que -1 n'est qu'une valeur de $\sqrt{+1}$, et 1 l'autre. Cela est tres subtilement remarqué, et on ne sçauroit admirer plus que je fais la sagacité de cette observation: mais je ne vois pas que de ce que -1 n'est qu'une valeur de $\sqrt{+1}$, il ne doive avoir que la moitié des logarithmes de $\sqrt{+1}$, d'autant que 1 qui est l'autre valeur a les mêmes que $+1$ de votre propre aveu. Il est vray que la formule des sinus donne ces valeurs de $\log -1$ mais est il bien demontré que cette formule donne toutes les valeurs de $\log. -1$? c'est ce que je ne vois pas encore; d'autant plus que la formule des sinus ne donne la valeur de ... que parceque -1 se trouve par hazard un des nombres de la formule imaginaire $x + \sqrt{xx-1}$ en faisant $x = -1$? d'où l'on pourroit croire que $\log -1$ n'est imaginaire, qu'autant que -1 est censé appartenir à la suite des quantités imaginaires $x + \sqrt{xx-1}$. vous dites encore, Monsieur que suivant mon raisonnement $l\sqrt{-1}$ devroit être $= 0$, & que si cela étoit $l\sqrt{-1}$ ne donneroit point la quadrature du cercle. je reponds à cela qu'il la donnera parceque $l\sqrt{-1}$ a plusieurs valeurs; et cela est si vray, que $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ represente indifferemment ou $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$

2478 1240

la circonference, ou deux fois la circonference &c. ainsi comme on auroit tort de dire que $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ ne sçauroit representer la circonference parcequ'il ne pourroit ~~pas representer deux~~ fois la circonference, il me semble ~~aussi~~ [illegible] nécessité que $l\sqrt{-1}$ ne doit pas $=0$ dans ce cas, parceque dans ce nombre il represente la circonference: j'en dis autant de $l\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ &c je ne vois pas qu'il soit démontré qu'aucune de ses valeurs ne puisse pas estre $=0$.

enfin je vous avois objecté, que je ne concevois pas comment log. [illegible] d'une quantité constante imaginaire de log. y & que supposant une fonction de y qui representât log. y, cette fonction n'augmenteroit pas d'une quantité imaginaire constante en faisant y negatif. vous repondés à cette objection par l'exemple de log. ay qui doit augmenter d'un nombre constant, en mettant ay pour y dans son expression. cette reponse ne paroit satisfaire à mon objection; et il pourroit en resulter que log. y n'est [illegible] representé par aucune fonction, ce que je suppose peut estre faussement. [illegible] monsieur, que je suis docile sur ce point & j'espere que vous me mettrés [illegible] en etat de l'estre sur tout le reste.

je suis bien sensible ~~aux~~ aux eloges que vous donnés à ma piece sur le mouvement de la lune; j'espere vous envoyer bientost un [illegible] sur l'application de ma theorie aux usages astronomiques; je conviens avec vous que c'est ce qu'il y a dans cette matiere de plus important et de plus difficile, & on ne s'apperçoit bien de la difficulté que quand on examine la chose de près; je seray bien charmé de sçavoir ce que vous penserés sur ma methode de traiter cette question. j'ay l'honneur d'estre avec la plus parfaite consideration,

Monsieur

Votre tres humble et tres obeissant serviteur

D'alembert

a Paris ce 26 avril 1747.

Il me vient une [illegible] — formule [illegible],
que je ne vous propose, monsieur, que comme
une premiere idée que j'en ay pas eu le temps
d'approfondir assés. je ne vois pas comment on
deduiroit de la formule des arcs de cercle $s =$
$\sqrt{-1} \times Log.\ x + \sqrt{xx-1}$, que les logarithmes des quan-
tités positives sont réels. car faisant $x > 1$. le log.
de $x + \sqrt{xx-1}$ qui est alors une quantité réelle devient
$= s\sqrt{-1}$, qui est le produit de deux imaginaires.
or si la valeur de s lorsque $x > 1$ n'est point une imaginaire
$a+b\sqrt{-1}$,
pure, mais un mixte imaginaire, comme je le crois au 1er
coup d'œil, $s\sqrt{-1}$ ne sera point réel. ce qui prouveroit que
la formule $-s\sqrt{-1} = Log.\ x + \sqrt{xx-1}$ ne represente point
en general tous les logarithmes, ny par consequent
tous ceux de $Log. -1$.

249

A Monsieur

Monsieur Euler, directeur de l'académie Royale des sciences & des belles lettres de Prusse, professeur de mathematiques, & membre de l'academie Imperiale de Petersbourg a Berlin