

Lettre de Beguelin à D'Alembert, 20 avril 1768

Expéditeur(s) : Beguelin

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

8 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.□

Citer cette page

Beguelin, Lettre de Beguelin à D'Alembert, 20 avril 1768, 1768-04-20

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 07/10/2025 sur la plate-forme EMAN :
<https://eman-archives.org/dalembert/items/show/685>

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitJ'eus l'honneur de vous écrire au mois de novembre...

RésuméAvait donné son mém. sur les prismes de Dollond au vol. 31 d'HAB que Formey devait lui envoyer, mais le vol. n'est pas encore parti. Joint un extrait de son mém. sur les probabilités après lecture du t. V des Mélanges. A lu dans le J. enc. des remarques sur les doutes de D'Al. P.-S. Objectif à cinq verres. Justification de la datationl'extrait annoncé, solution du problème de « Croix et pile » est le Ms. 876, f. 278-279

Numéro inventaire68.25

Identifiant597

NumPappas851

Présentation

Sous-titre851

Date1768-04-20

Mentions légales

- Fiche : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle). Licence Creative Commons Attribution - Partage à l'identique 3.0 (CC BY-SA 3.0 FR).
- Numérisation : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG).

Editeur de la fiche Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettre Non renseigné
 Publication de la lettre Henry 1885, p. 61-62
 Lieu d'expédition Berlin
 Destinataire D'Alembert
 Lieu de destination Paris
 Contexte géographique Paris

Information générales

Langue Français
 Source autogr., d.s., « à Berlin », P.-S., 2 p.
 Localisation du document Paris Institut, Ms. 876, f. 277

Description & Analyse

Analyse/Description/Remarques l'extrait annoncé, solution du problème de « Croix et pile » est le Ms. 876, f. 278-279
 Auteur(s) de l'analyse l'extrait annoncé, solution du problème de « Croix et pile » est le Ms. 876, f. 278-279
 Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

Monsieur,

J'ai l'honneur de Vous écrire au mois de novembre passé,
en Vous envoyant l'extrait de mon Mémoire sur les Primes
de Delfond. Ce paquet avoit été joint par Mr. Tormey au
Volume XXI^e de nos Mémoires; mais j'apprends que le tout
est encore ici. Permettez-moi, Monsieur, que j'y ajoute
dans un nouveau paquet, l'extrait d'un autre mémoire
que je lus en janvier dernier sur le calcul des probabilités.
C'est la lecture du V. tome de Vos mélanges, qui m'en
a fourni l'idée. Votre but est de faire penser; et il seroit
bien flatteur pour moi, que les pensées que Vous m'avez
fait naître sur cette matière eussent votre approbation.
Mon Mémoire est trop étendu pour en grossir ce paquet;
je me borne à joindre ici une solution du problème de
Croix et pile, tel que Mr. de la Grange me l'a proposé.

ainsi toutes les solutions que je propose

Gu.

III

W. 17

pour éviter la difficulté qui peut résulter de la
répétition des événements.

J'ai vu depuis peu dans le journal Encyclopédique
des remarques sur vos doutes. Mais il me parait que la
réponse qu'on y fait à vos difficultés a le défaut com-
mune d'être tirée de considérations étrangères au problème,
et je ne vois pas qu'en restant dans les termes généraux
du problème, on puisse rien opposer de solide à votre
principale difficulté.

Pour ne pas abuser, Monsieur, d'un temps dont vous
faîtes un usage si précieux, je me réfère à ma préci-
dente lettre, et suis avec une considération infinie

Monsieur,

à Berlin ce 20.
d'avril 1768.



P. S. j'ai fait exécuter un objet
de 5 à six verres, toutes les 10.
lignes, terminées de 6. Convexes
sur un même rayon, qui je n'ai
pas que de 6. pouces pour épar-
gner la dépense. Cela a donné
une bonne lunette avec un objectif
convexe, le foyer est très net, en pre-
nant une ouverture de 2. pouces, et
ce qui y a de singulier c'est que l'objet
est sensiblement le même, en n'employant
que trois verres, & en les joignant tous cinq.
par qu'à 2. verres la raison des diffractions seroit comme 1. à 2.
et loup de cristal d'Angleterre entre 3. de Cornouailles.

Votre très humble
et très obéissant serviteur
Bequelin.

Vou l'on doit tirer la valeur de l'enjeu. e .

279

Or il y a ici trois cas à distinguer:

1^o lorsque $n=1$; c.à d. qu'on ne jette qu'une seule pièce,
le second membre de l'équation devient nul; et
l'on a: $\frac{2-1}{2} + e = 0$ ou $e = 1 - e$

138

Problème

Proposé par M^r. de la Grange



Pierre jette à la fois en l'air un nombre quelconque
de pièces de monnaie, numérotées 1, 2, 3, etc. sous
la condition que si en retombant la pièce n^o 1. tombe
sur pile, Paul recevra de lui 1. écu; si c'est n^o 2.
qui donne pile, il aura 2. écus. si c'est n^o 3. il au-
ra 3. écus. qu'en un mot, en suivant l'ordre naturel
des numéros, la première pièce n^o n. qui se trou-
vera tomber pile, vaudra à Paul 2ⁿ⁻¹ écus.
On demande quel doit être l'enjeu de Paul, en
commençant la partie, pour jouer à jeu égal.

Solution.

Soit le nombre total des pièces fini, ou infini ∞ .
l'enjeu $= e$.

D'abord en considérant chaque pièce séparément
il est évident qu'elle peut également donner croix
ou pile. ce qui donne l'enjeu $e = \frac{1}{2}e$.

Mais en considérant ensuite l'ensemble des
pièces qu'on jette, il n'est pas aussi probable
que toutes les pièces depuis n^o 1. jusqu'à n^o n-1.
donneront croix. (c.à d. qui est nécessaire pour
atteindre au prix du n^o n.) qu'il est probable qu'il
les ne seront pas toutes tombées du même côté;
ainsi toutes les solutions que je propose pour

pour éviter la difficulté qui peut résulter de la

le problème de M^r Nicolas Bernoulli, où les évènements sont successifs, et répétitifs, peuvent également s'appliquer à ce problème-ci, et modifier l'usage déterminé par les Analystes.

Mais on peut, ce me semble, déterminer aussi cet enjeu plus directement, par la considération suivante :

Puisque la partie doit être égale, il faut que l'espérance de Pierre compense le risque auquel il s'expose. Or comme chaque pièce peut également donner croix, ou pile, et que le N^o 1. annonçant pile, exclut tous les autres cas, il est évident que la probabilité de terminer le jeu par le N^o 1. est aussi grande, que celle de le terminer par l'un de tous les autres N^{os} pris ensemble. Il faut donc (dès que l'on jette plus d'une pièce) que l'enjeu soit plus grand que le Prix que Pierre promet au N^o 1. par ce moyen Pierre aura une probabilité $= \frac{1}{2}$ de gagner l'excédent de l'enjeu sur la première prise, jointe à l'espérance plus ou moins reculée qu'aucune pièce ne donnera pile. Egalant donc le gain que Pierre peut faire, multiplié par la probabilité de gagner, à la somme qu'il peut perdre, combinée avec la probabilité de la perdre, on aura l'équation :

$$\frac{c-1}{2} + \frac{c}{2^n} = \frac{2^{n-1} - c}{2^n}$$

Voie

D'où l'on doit tirer la valeur de l'enjeu e .

Or il y a ici trois cas à distinguer:

I. lorsque $n=1$, c. à d. qu'on ne jette qu'une seule pièce, le second membre de l'équation devient nul; et l'on a:

$$\frac{e-1}{2} + \frac{e}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{e-1-e}{2} = 0$$

Donc $e = \frac{1}{2}$ Ecu.

II. Lorsque $n=\infty$ ou qu'il est illimité, le terme $\frac{e}{2^n}$ devient infiniment petit; et l'équation se réduit à: $\frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $e = 2$ Ecu.

III. Entre ces deux valeurs extrêmes de l'enjeu, l'équation donne, pour tel nombre déterminé de pièces qu'on voudra jeter à la fois, la formule

$$e = \frac{2^n}{2^{n-1} + 2}$$

D'où je tire les valeurs de l'enjeu, comme suit.

Nombre des pièces	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Enjeu en ecus	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{64}{33}$	$\frac{128}{85}$	...

Remarque

On pourroit objecter contre cette solution, que dans le premier membre de l'équation, je fais entrer deux espérances de Pierre, dont il ne peut ni en moins jamais réaliser qu'une; car si pile vient au premier numero, l'espérance $\frac{e}{2^n}$ n'a plus lieu.



Le secrétaire lui ensuite le Rapport des Membres de l'Académie nommés pour examiner les pièces relatives à l'épargne du bois; il étoit conçu en ces termes: „Il y a deux ans que le Directeur général des finances & domaines du Roi proposa par l'Académie un prix de 100 siddalers à

„mises pièces qu'elle a reçues, il s'en trouve même quelques-unes qui traitent de ces objets: mais il n'y en a aucune qui lui ait paru devoir remporter le prix, quoiqu'il s'en trouve une pourtant qui mérite d'être distinguée. C'est un plan pour construire des fours où l'on pourra

ira. On-
iniqua.
err^m =
d'une fa-

et si celle-ci a lieu, la pièce n° 1. n'a pas tourné pile.

Mais il faut considérer que pour fixer le plus grand, et le plus petit enjeu, nous avons effectivement fait évanouir celle des deux espérances qui ne sauroit se réaliser: car nous avons résolu l'équation, lorsque $n=1$. à $\frac{c}{2^n} = \frac{2^{n-1} - c}{2^n}$

$$\text{et lorsque } n=\infty. \text{ à } \frac{c-1}{2} = \frac{2^{n-1} - c}{2^n}$$

Or il seroit absurde qu'entre ces deux valeurs extrêmes, l'enjeu devint plus grand qu'il ne l'est lorsque le nombre des pièces, et des prix est infini; c'est pourtant ce qui arriveroit si l'on vouloit prendre la valeur moyenne des deux espérances de Pierre, car on auroit l'équation:

$$\frac{\frac{c-1}{2} + \frac{c}{2^n}}{2} = \frac{2^{n-1} - c}{2^n}$$

$$\text{et par conséquent } c = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1} + 2} \text{ Valeurs qui croissent}$$

de 2. Eus dès que le nombre des pièces, n , seroit au dessus de 3. quoiqu'en même ici la plus grande valeur de l'enjeu n'ait qu'à 3. Eus, en posant $n=\infty$.

Exceptés les deux cas extrêmes, chacune des deux espérances de Pierre, contribue à modifier la valeur de l'enjeu; on ne sauroit donc exclure ni l'une ni l'autre. Mais ces espérances elles mêmes sont déterminées à leur tour par la valeur croissante de

l'enjeu par la probabilité de gagner, et de perdre, combinée avec la probabilité de la perdre, on aura l'équation:

$$\frac{c-1}{2} + \frac{c}{2^n} = \frac{2^{n-1} - c}{2^n}$$

Voici

l'enjeu, et varient avec le nombre des pièces, comme la table suivante le montre:

Nombre des pièces. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 12, \dots, \infty$
 l'espérance $\frac{e-1}{2}$ vaut $-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{7}{18}, \frac{15}{24}, \dots, \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-1}+2}, \dots, \frac{1}{2}$ Escus.
 l'espérance $\frac{e}{2}$ vaut $\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}+2}, \dots, 0$ Escus.

Ces deux espérances sont égales lorsqu'on a $2^{n-2}-1=1$, c. a. d. lorsqu'on joue avec trois pièces, mais comme l'espérance $\frac{e}{2}$ entre doublement dans la détermination de l'enjeu, tandis que l'espérance $\frac{e-1}{2}$ n'y entre qu'une fois, il n'y a aucun cas où elles contribueraient également à fixer cet enjeu. Si y en avoit un, ce seroit lorsque la valeur de e , donnée par chacune de ces espérances prise seule, seroit la même, il faudroit donc avoir $2^{n-2} = \frac{2^n}{2^{n-1}+1}$, ce qui supposeroit $2^{n-1}+1=n$, et par conséquent $n=3\frac{1}{2}$.

Rapport
entre
les
deux
espérances

l'espérance
est
la même
que
l'espérance
simple

Le secrétaire lut ensuite le Rapport des Membres de l'Académie nommés pour examiner les pièces relatives à l'épargne du bois; il étoit conçu en ces termes: „Il y a deux ans que le Directoire général des finances & domaines du Roi proposa par l'Académie un prix de 100 rixdallers à

celui qui proposeroit le moyen de faire le plus d'usage du bois, rap-
 „miles pièces qu'elle a reçues, il s'en trou-
 „ve même quelques-unes qui traitent de
 „ces objets: mais il n'y en a aucune qui
 „lui ait paru devoir remporter le prix,
 „quoiqu'il s'en trouve une pourtant qui
 „mérite d'être distinguée. C'est un plan
 „pour construire des fours où l'on pourroit

une. On
indique
l'usage
d'une



Supplé par la probabilité de gagner, à la somme
qui peut perdre, combinée avec la probabilité
de la perdre, on aura l'équation:

$$\frac{c-1}{2} + \frac{c}{2^n} = \frac{2^{n-1}-c}{2^n}$$

Voici