Lettre de Beguelin à D'Alembert, 20 avril 1768

Auteur : Beguelin

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

8 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitJ'eus l'honneur de vous écrire au mois de novembre...
RésuméAvait donné son mém. sur les prismes de Dollond au vol. 31 d'HAB que Formey devait lui envoyer, mais le vol. n'est pas encore parti. Joint un extrait de son mém. sur les probabilités après lecture du t. V des Mélanges. A lu dans le J. enc. des remarques sur les doutes de D'Al. P.-S. Objectif à cinq verres.
Justification de la datationl'extrait annoncé, solution du problème de « Croix et pile » est le Ms. 876, f. 278-279
Numéro inventaire68.25
Identifiant597
NumPappas851

Présentation

Sous-titre851
Date1768-04-20
Mentions légales

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreNon renseigné
Publication de la lettreHenry 1885, p. 61-62
Lieu d'expéditionBerlin
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

Information générales

LangueFrançais
Sourceautogr., d.s., « à Berlin », P.-S., 2 p.
Localisation du documentParis Institut, Ms. 876, f. 277

Description & Analyse

Analyse/Description/Remarquesl'extrait annoncé, solution du problème de « Croix et pile » est le Ms. 876, f. 278-279
Auteur(s) de l'analysel'extrait annoncé, solution du problème de « Croix et pile » est le Ms. 876, f. 278-279
Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

Monsieur,

J'eus l'honneur de Vous écrire au mois de novembre passé, en Vous envoiant l'extrait de mon Mémoire sur les Prismes de Dollond. ce paquet avoit été joint par Mr. Formey au Volume XXIe. de nos Mémoires; mais j'apprends que le tout est encore ici. Permettez donc, Monsieur, que j'y ajoute dans un nouveau paquet, l'extrait d'un autre memoire que je lûs en janvier dernier sur le calcul des probabilités. C'est la lecture du 2e. tome de Vos mélanges, qui m'en a fourni l'idée. Votre but est de faire penser; et il seroit bien flatteur pour moi, que les pensées que Vous m'avez fait naître sur cette matière eussent Votre approbation.

Mon Mémoire est trop étendu pour en grossir ce paquet; je me borne à joindre ici une solution du problème de Croix et pile, tel que Mr. de la Grange me l'a proposé.

ainsi toutes les solutions que je prop

pour éviter la dificulté qui peut resulter de la répétition des évenemens.

J'ai vû depuis peu dans le journal Encyclopedique des remarques sur vos doutes. Mais il me paroit que la réponse qu'on y fait à vos dificultés a le defaut comun d'être tirée de considérations étrangeres au probleme, et je ne vois pas qu'en restant dans les termes généraux du probleme, on puisse rien opposer de solide à votre principale dificulté.

Pour ne pas abuser, Monsieur, d'un tems dont vous faites un usage si précieux, je me réfere à ma précédente lettre, et suis avec une considération infinie

Monsieur,

à Berlin ce 20e
d'Avril 1768.

Votre très humble
et très obéissant Serviteur
Beguelin.

P. S. j'ai fait executer un objectif à cinq verres,† toutes les 10 faces, 4 concaves et 6 convexes sur un même rayon, que je n'ai pris que de 6 pouces pour épargner la dépense. Cela a donné une bonne lunette avec un oculaire concave; le foier est très net en prenant une ouverture de 5/4 pouces, et ce qu'il y a de singulier c'est que l'effet est sensiblement le même, en n'emploiant que trois verres, et en les joignant tous cinq, parce qu'à 3 verres la raison des refractions seroit come 1 à 2.

† deux de Cristal d'Angleterre entre 3 de Crownglass.

D'où l'on doit tirer la valeur de l'enjeu e.

Or il y a ici trois cas à distinguer:

1° lorsque $n=1$; c.a.d. qu'on ne jette qu'une seule pièce, le second membre de l'equation devient nul; et l'on a: $e-1 + e = 0$. ou. $e=1-e$

Problème

Proposé par Mr. de la Grange

Pierre jette à la fois en l'air un nombre quelconque de pièces de monoie, numérotées 1, 2, 3, etc. sous la condition que si en retombant la pièce N°. 1. tourne *pile*, Paul recevra de lui 1. Ecu; si c'est N°. 2. qui donne *pile*, il aura 2. Ecus. si c'est N°. 3. il aura 4. Ecus. qu'en un mot, en suivant l'ordre naturel des numeros, la première pièce N°. n. qui se trouvera tourner *pile*, vaudra à Paul 2^{n-1}. ecus: On demande quel doit être l'enjeu de Paul, en commençant la partie, pour jouer à jeu égal?

Solution.

Soit le nombre total des pièces, fini, ou infini $= t$. l'enjeu $= e$.

D'abord en considérant chaque pièce séparément il est évident qu'elle peut également donner *croix* ou *pile*. ce qui donne l'enjeu $e = \frac{1}{2}t$.

Mais en considérant ensuite l'ensemble des pièces qu'on jette, il n'est pas aussi probable que toutes les pièces depuis N°. 1. jusqu'à N°. $n-1$. donneront *croix*: (ce qui est nécessaire pour atteindre au prix du N°. n.) qu'il est probable qu'elles ne seront pas toutes tournées d'un même côté; ainsi toutes les solutions que je propose pour

pour éviter la dificulté qui peut resulter de la

le problême de Mr Nicolas Bernoulli, où les évé-nemens sont successifs, et répétés, peuvent égale-ment s'appliquer à ce problême-ci, et modifier l'enjeu déterminé par les Analystes.

Mais on peut, ce me semble, déterminer aussi cet enjeu plus directement, par la considéra-tion suivante :

Puisque la partie doit être égale, il faut que l'espérance de Pierre compense le risque auquel il s'expose. Or comme chaque pièce peut égale-ment donner croix, ou pile, et que le No. 1. amé-nant pile, exclut tous les autres cas, il est évident que la probabilité de terminer le jeu par le No. 1. est aussi grande, que celle de le terminer par l'un de tous les autres Nos. pris ensemble. Il faut donc (dès que l'on jette plus d'une pièce) que l'en-jeu soit plus grand que le Prix que Pierre pro-met au No. 1. par ce moien Pierre aura une probabilité $= \frac{1}{2}$. de gagner l'excedent de l'enjeu sur le premier prix, jointe à l'espérance plus ou moins reculée qu'aucune pièce ne donnera pile. Egalant donc le gain que Pierre peut faire, mul-tiplié par la probabilité de gagner, à la somme qu'il peut perdre, combinée avec la probabilité de la perdre, on aura l'équation :

$$\frac{e-1}{2} + \frac{e}{2^n} = \frac{2^{n-1}-e}{2^n}$$

Voici

D'où l'on doit tirer la valeur de l'enjeu e.

Or il y a ici trois cas à distinguer:

I. lorsque $n=1$. c.a.d. qu'on ne jette qu'une seule pièce, le second membre de l'équation devient nul; et l'on a. $\frac{e-1}{2}+\frac{e}{2^n}=0$. ou.. $\frac{e}{2^n}=\frac{1-e}{2}$

Donc. $e=\frac{1}{2}$. Ecu.

II. Lorsque $n=\infty$ ou qu'il est illimité, le terme $\frac{e}{2^n}$. devient infiniment petit; et l'équation se réduit à. $\frac{e-1}{2}=\frac{1}{2}$. Donc $e=2$. Ecus.

III. Entre ces deux valeurs extrêmes de l'enjeu, l'équation donne, pour tel nombre déterminé de pièces qu'on voudra jetter à la fois. la formule

$$e=\frac{2^n}{2^{n-1}+2}.$$

D'où je tire les valeurs de l'enjeu, comme suit.

Nombre des pièces	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	...	∞
Enjeu en ecus..	$\frac{1}{2}$.	1.	$\frac{4}{3}$.	$\frac{8}{5}$.	$\frac{16}{9}$.	$\frac{32}{17}$.	$\frac{64}{33}$.	$\frac{128}{65}$	...	2

Remarque

On pourroit objecter contre cette solution, que dans le premier membre de l'équation, je fais entrer deux espérances de Pierre, dont il ne peut néanmoins jamais réaliser qu'une; car si pile vient au premier numero, l'esperance $\frac{e}{2^n}$. n'a plus lieu,

Le secretaire lut ensuite le Rapport des Membres de l'Académie nommés pour examiner les pieces relatives à l'épargne du bois; il étoit conçu en ces termes: „Il y a „deux ans que le Directoire général des „finances & domaines du Roi proposa par „l'Académie un prix de 100 risdallers à „...relativement à l'épargne du bois. Parmi les pieces qu'elle a reçues, il s'en trouve même quelques-unes qui traitent de „ces objets: mais il n'y en a aucune qui „lui ait paru devoir remporter le prix, „quoiqu'il s'en trouve une pourtant qui „mérite d'être distinguée. C'est un *plan* „*pour construire des fours où l'on pourra* et si celle-ci a lieu, la pièce N°. 1. n'a pas tourné pile ;

Mais il faut considérer que pour fixer le plus grand, et le plus petit enjeu, nous avons effectivement fait évanouir celle des deux espérances qui ne sauroit se réaliser : car nous avons réduit l'équation, lorsque $n=1$. à $\frac{e}{2^n} = \frac{2^{n-1}-e}{2^n}$

et lorsque $n=\infty$. à $\frac{e-1}{2} = \frac{2^{n-1}-e}{2^n}$

Or il seroit absurde qu'entre ces deux valeurs extrêmes, l'enjeu devint plus grand qu'il ne l'est lorsque le nombre des pièces, et des prix est censé infini ; c'est pourtant ce qui arriveroit si l'on vouloit prendre la valeur moyenne des deux espérances de Pierre. car on auroit l'équation :

$$\frac{\frac{e-1}{2} + \frac{e}{2^n}}{2} = \frac{2^{n-1}-e}{2^n}.$$

et par conséquent $e = \frac{2^{(n+1)}3}{2^{n+1}+12}$. Valeur qui atteindroit 2. Ecus dès que le nombre des pièces, n, seroit au dessus de 3. quoique même ici la plus grande valeur de l'enjeu n'étoit qu'à 3. Ecus, en posant $n=\infty$.

Exceptés les deux cas extrêmes, chacune des deux espérances de Pierre, contribue à modifier la valeur de l'enjeu : on ne sauroit donc exclure ni l'une ni l'autre. Mais ces espérances elles mêmes sont déterminées à leur tour par la valeur croissante de

[illegible] par la probabilité [illegible] qu'il peut perdre, combinée avec la probabilité de la perdre, on aura l'équation :

$$\frac{e-1}{2} + \frac{e}{2^n} = \frac{2^{n-1}-e}{2^n}$$

D'où

l'enjeu, et variant avec le nombre des pièces, comme la table suivante le montre:

nombre des pièces. $n = 1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 .\ 5 .\ 6 \ldots n \ldots \infty$

l'esperance $\frac{e-1}{2}$ vaut $-\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{7}{18}, \frac{15}{34}; \ldots \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-1}+2} \ldots \frac{1}{2}$ écus.

l'esperance $\frac{e}{2^n}$ vaut $\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{18}, \frac{1}{34}, \ldots \frac{1}{2^{n-1}+2} \ldots 0$. écus.

Ces deux espérances sont égales lorsqu'on a $2^{n-2}-1=1$. c.a.d. lorsqu'on joue avec trois pièces, mais comme l'espérance $\frac{e}{2^n}$ entre doublement dans la détermination de l'enjeu, tandis que l'espérance $\frac{e-1}{2}$ n'y entre qu'une fois, il n'y a aucun cas où elles contribuent également à fixer cet enjeu. S'il y en avoit un, ce seroit lorsque la valeur de e, donnée par chacune de ces espérances prise seule, seroit la même. Il faudroit donc avoir $2^{n-2} = \frac{2^n}{2^{n-1}+1}$. ce qui supposeroit $2^{n-1}+1=4$. et par conséquent $n=3\frac{1}{2}$.

Le secretaire lut ensuite le Rapport des Membres de l'Académie nommés pour examiner les pieces relatives à l'épargne du bois; il étoit conçu en ces termes: „Il y a „deux ans que le Directoire général des „finances & domaines du Roi proposa par „l'Académie un prix de 100 ridallers à

„plus réellement à l'épargne du bois. Par„miles pieces qu'elle a reçues, il s'en trou„ve même quelques-unes qui traitent de „ces objets: mais il n'y en a aucune qui „lui ait paru devoir remporter le prix, „quoiqu'il s'en trouve une pourtant qui „mérite d'être distinguée. C'est un *plan* „*pour construire des fours où l'on pourra*

-tiplié par la probabilité de gagner, & la somme qu'il peut perdre, combinée avec la probabilité de la perdre, on aura l'équation :

$$\frac{c-1}{2} + \frac{c}{2^n} = \frac{2^{n-1} - c}{2^n}$$

D'où