Lettre de Euler Leonhard à D'Alembert, 15 février 1748

Expéditieur(s) : Euler Leonhard

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

5 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Citer cette page

Euler Leonhard, Lettre de Euler Leonhard à D'Alembert, 15 février 1748, 1748-02-15

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 02/12/2025 sur la plate-forme EMAN : https://eman-archives.org/dalembert/items/show/952

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitJe suis bien ravi que le moyen dont vous vous êtes servi a eu un si bon succès pour rétablir votre santé, …
RésuméForme de la loi d'attraction, il propose son hypothèse. Rép. à l'objection de D'Al. sur la représentation de ex. Tables de la Lune. Lui enverra son « Analyse des infinis » et ses Opuscula. Relation liant les sommes de diviseurs de nombres.
Justification de la datationNon renseigné
Numéro inventaire48.02
Identifiant639
NumPappas24

Présentation

Sous-titre24
Date1748-02-15

Fichier issu d'une page EMAN : http://eman-archives.org/dalembert/items/show/952?context=pdf

Mentions légales

- Fiche : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle). Licence Creative Commons Attribution - Partage à l'identique 3.0 (CC BY-SA 3.0 FR).
- Numérisation : Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG).

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreLateX
Publication de la lettreEuler, O. O., IV A, 5, p. 279-282
Lieu d'expéditionBerlin
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

Information générales

LangueFrançais
Sourceimpr.
Localisation du documentNon renseigné

Description & Analyse

Analyse/Description/Remarquescat. coll. Gotthold Lessing, Berlin, 1916, n° 6099 : autogr., d.s., « Berlin », 4 p.
Auteur(s) de l'analysecat. coll. Gotthold Lessing, Berlin, 1916, n° 6099 : autogr., d.s., « Berlin », 4 p.
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

'689 06.24

EULER À D'ALEMBERT
Berlin, 15 février 1748

Monsieur,

Je suis bien ravi que le moyen dont vous vous êtes servi a eu un si bon succes pour retablir votre santé [1], et je souhaite qu'elle soit d'une longue durée malgré les sublimes recherches, dans lequelles vous vous enfoncés. J'ai vu avec bien du plaisir que vous pensés comme moy sur les irregularités, qui paroissent se trouver dans les forces celestes [2], car j'avois d'abord fait cette remarque, que quoiqu'on accorde que les moindres particules de la matiere s'attirent mutuellement en raison reciproque des quarrés des distances, il n'en suive pas, que cette même loi ait lieu dans les corps d'une grandeur finie, à moins que tous les deux corps, l'attirant, et l'attiré, ne soient spheriques et composés d'une matière homogene, ou d'une autre forme qui revienne au même. Les recherches, qu'on a faites sur l'attraction de la Terre, en tant que sa figure n'est pas spherique, donnent clairement à connoitre, que sa force d'attraction ne suit pas exactement la raison reciproque des quarrés des distances, mais qu'elle est comme

$$\frac{\alpha}{z\,z} + \frac{\beta}{z^4} + \frac{\gamma}{z^6} + \text{etc.}$$

z marquant la distance [3]. Et partant par cette raison la force dont la Lune est tirée vers la Terre ne sera pas exactement en raison reciproque du quarré de la distance; quand même le corps de la Terre seroit exactement spherique. Mais si le corps de la Lune etoit allongé, cette force souffriroit une double irregularité, et pour m'assurer de ce dernier derangement, j'avois aussi comme vous consideré le corps de la Lune, comme s'il étoit composé de deux globes A et B joints d'une verge immaterielle AB, où se trouve le centre de gravité en L [4].

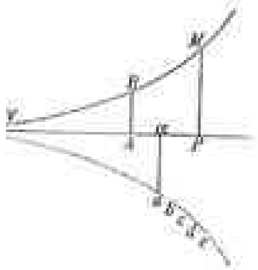
chacun de ces points est isolé sans liaisons avec les voisins, quoique leurs distances soient même infiniment petites. De même l'equation $y = (-2)^x$, ne donnera qu'une infinité de tels points conjug[u]és sans aucune courbe continue [7]: et partant l'equation $y = e^x$ ne representera qu'une courbe continue au dessus l'axe, quoiqu'il y ait de l'autre côté une infinité de points conjug[u]és.

Fichier issu d'une page EMAN : http://eman-archives.org/dalembert/items/show/952?context=pdf

Ayant supposé que la direction de la verge AB tombe constamment presque dans la ligne LT tirée vers le centre de la Terre T, à moins que le mouvement du point L tantôt plus tantôt moins rapide n'y produise quelque declinaison j'ai trouvé aussi comme vous, que le mouvement du point L se doit faire à peu prés dans une ellipse, mais dont la ligne d'absides avance: et le calcul m'a fourni cette regle, que le mouvement moyen de la Lune sera au mouvement de l'apogée comme LT^2 à $6\ LA \cdot LB$, et partant cette figure de la Lune devroit absolument causer un mouvement progressif de l'apogée. Donc puisque suivant les observations le mouvement moyen de la Lune est au mouvement de l'apogée comme 1 à 0,0084473, et que la theorie tirée de la force du Soleil ne donne pour cette raison que 1 à 0,0041045: où il manque dans le mouvement de l'apogée la partie 0,0043428, à laquelle j'ai egalé l'effet maintenant trouvé $6\ LA \cdot LB/LT^2$. Donc faisant $LA = LB$, et supposant $LT = 60$ demi-diametres de la Terre il en vient $LA = LB = 1^1/_4$, et partant AB seroit de $2^1/_2$ rayons de la Terre, ou la longitude de la Lune AB surpasserait le diametre de la Terre: ce qui me parait aussi, comme vous le remarqués, insoutenable. Au reste pour le mouvement de libration [5] je trouve, que la ligne AB devroit presque toujours être parallele à celle qui represente le lieu moyen de la Lune, et que par consequent l'angle ALT pourroit monter jusqu'à 6° et au delà.

Pour notre dispute sur les logarithmes [6], je conviens que la valeur de y de l'equation $y = a^x$ est double toutes les fois, que x est une telle fraction $n/2$, n étant un nombre impair: mais vous m'accorderés reciproquement que lorsque x est ou un nombre entier ou toute autre fraction que $n/2$, alors la valeur de y ne sera plus double. Car soit $a = 2$; et $y = 2^x$, il est bien clair que mettant pour x les valeurs 1, 2, 3, 4 etc. celles de y seront 2, 4, 8, 16 etc. et dans ces cas aucune valeur negative de y n'aura certainement lieu.

Soit maintenant x l'abscisse AP et y l'appliquée PM, et il n'y a aucun doute que l'equation $y = 2^x$ ne donne la courbe continue VBM au dessus de l'axe AP. Mais si $x = \frac{1}{2} = A\alpha$, la valeur de y etant double $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ je conviens qu'il y aura en a



un point conjug[u]é et comme la même chose arrive dans une infinité de cas de x je suis d'accord qu'il y aura une infinité de tels points conjug[u]és a, b, c, d, sous l'axe, mais je pretend que chacun de ces points est isolé sans liaisons avec les voisins, quoique leurs distances soient même infiniment petites. De même l'equation $y = (-2)^x$, ne donnera qu'une infinité de tels points conjug[u]és sans aucune courbe continue [7]: et partant l'equation $y = e^x$ ne representera qu'une courbe continue au dessus l'axe, quoiqu'il y ait de l'autre côté une infinité de points conjug[u]és.

Fichier issu d'une page EMAN : http://eman-archives.org/dalembert/items/show/952?context=pdf

Je reviens encore à la Lune pour vous marquer, qu'ayant construit sur la theorie des tables [8], j'ai trouvé une difference assés considerable entr'elles et les observations, qui montoient quelques fois au delà de 12', quoique j'eusse reglé le mouvement de l'apogée sur les observations. Depuis j'ai corrigé ces tables par les observations, et les erreurs sont à present au dessous de 5': et pour la pluspart elles ne surpassent gueres 2'. Mais à cette heure mes tables ne sont plus conformes à la theorie, dont j'ai remarqué encore une autre observation; la parallaxe de la Lune trouvée par la theorie étant toujours plus petite presque d'une minute que l'observée, de sorte que la force dont la Lune est poussée vers la Terre doit être moindre qu'on suppose dans la theorie; tant s'en faut qu'on dusse augmenter cette force par quelque effet de magnetisme [9] de la Terre.

Mr Bou[s]quet me marque, que mon Introduction dans l'Analyse des infinis paraitra incessament [10], et je l'ai chargé de vous en presenter d'abord un exemplaire en mon nom. Vous recevrés aussi bientôt un exemplaire de mes opuscula [11], dont je suis bien faché, que je n'ai pas trouvé occasion de vous les presenter plutot.

A l'égard de la suite $1 - x - x^2 + x^5 + x^7$ etc. $= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. dont je vous ai parlé, j'en ai tiré une proprieté fort singuliere des nombres par rapport à la somme des diviseurs de chaque nombre. Que $\int n$ marque la somme de tous les diviseurs du nombre n de sorte que $\int 1 = 1$; $\int 2 = 3$; $\int 3 = 4$; $\int 4 = 7$; $\int 5 = 6$; $\int 6 = 12$; $\int 7 = 8$ etc. il paroit d'abord presque impossible de decouvrir aucune loi dans la suite de ces nombres 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, [15,] 13, 18 etc. mais j'ai trouvé que chaque terme depend de quelques uns des precedents selon cette formule:

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12)$$
$$+ \int(n-15) - \int(n-22) \quad \text{etc.}$$

où il est à remarquer 1° que les nombres

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 5, & 7, & 12, & 15, & 22, & 26, & 35, & 40 & \text{etc.} \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 & \end{array}$$

se forment aisement par les differences considerées alternativement [12].
2° Dans chaque cas on ne prend que les termes, où les nombres apres le signe $\int$ ne sont point negatifs.
3° S'il arrive ce terme $\int 0$ ou $\int(n-n)$, on prendra pour la valeur le nombre n même.

Ainsi vous verrés que

$$\int 4 = \int 3 + \int 2 = 7;$$
$$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13;$$
$$\int 15 = \int 14 + \int 13 - \int 10 - \int 8 + \int 3 + \int 0 = 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24;$$
$$\int 35 = \int 34 + \int 33 - \int 30 - \int 28 + \int 23 + \int 20 - \int 13 - \int 9 + \int 0$$
$$= 54 + 48 - 72 - 56 + 24 + 42 - 14 - 13 + 35 = 48.$$

Fichier issu d'une page EMAN : http://eman-archives.org/dalembert/items/show/952?context=pdf

Taton, corr. Euler - DA.

Donc toutes les fois que n est un nombre premier on trouvera que $\int n = n + 1$ et partant puisque la nature des nombres premiers entre dans cette consideration cette loi me paroit d'autant plus remarquable [13].

J'ai l'honneur de vous assurer de la plus parfaite consideration avec laquelle je suis

Monsieur,
votre très humble et très obeissant serviteur
L. Euler

Berlin le 15 Fevrier 1748.

R 25 Réponse à la lettre n° 12 de d'Alembert du 20-1-1748
Autographe (fr.) non retrouvé; en 1911, il se trouvait dans une collection privée
Publ.: Bibl. math., 3e série, XI, 1911, p. 223–226.

[1] Voir la lettre n° 12 de d'Alembert du 20 janvier 1748, note 1.
[2] Voir la lettre n° 12 de d'Alembert, notes 6 et 7.
[3] Euler se rallie ainsi au point de vue présenté par Clairaut dans sa lecture publique du 15 novembre 1747.
[4] Voir la lettre n° 12 de d'Alembert, note 4.
[5] Dans sa lettre n° 12, d'Alembert signalait avoir trouvé (cf. note 4) que «les librations de la Lune devoient être fort petites».
[6] Voir la lettre n° 12, note 2.
[7] Euler avait examiné les particularités de la fonction $y = (-1)^x$ et de sa représentation graphique bien avant cette date, dans sa correspondance avec Jean I Bernoulli en 1727 et 1728 (voir lettres R. 190–192). Voir aussi «Introductio in analysin infinitorum», vol. 2, § 517 (E. 102; O. I, 9).
[8] Voir la lettre n° 7, note 3.
[9] Voir la lettre n° 12, notes 6–7.
[10] Il s'agit de l'«Introductio in analysin infinitorum», vol. 1 et 2, Lausanne, M. M. Bousquet & socios, 1748 (E. 101–102; O. I, 8–9) qui paraîtra effectivement quelques jours plus tard. Le 23 mars 1748, Euler écrira en effet à Maupertuis (R. 1529) que l'éditeur Bousquet lui a annoncé l'achèvement de cet ouvrage dont il sera d'ailleurs question dans plusieurs lettres ultérieures.
[11] C'est l'ouvrage E. 80; voir la lettre n° 12 de d'Alembert, du 20 janvier 1748, note 8.
[12] La formule

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{m_k}, \quad m_k = \frac{3k^2-k}{2}$$

a été découverte par Euler à l'automne 1740 au cours de ses recherches sur la *partitio numerorum* et elle fut mentionnée dans ses lettres à D. Bernoulli vers la fin de cette année (voir la lettre de D. Bernoulli du 28 janvier 1741 (R. 140), la lettre d'Euler à Nicolas I Bernoulli, du 1er septembre 1742 (R. 234), ainsi que la lettre d'Euler à Goldbach du 15 octobre 1743 (R. 766)). Cette formule se trouve pour la première fois dans les «Observationes analyticae variae de combinationibus», présentées à l'Académie de Pétersbourg le (17) 6 avril 1741 et publiées dans les «Comm. Ac. Petrop.» 13 (1741–1743), 1751 (E. 158; O. I, 2), mais elle a paru d'abord en 1748 dans le 16e chapitre, § 323, du 1er tome de l'«Introductio» (E. 101, O. I, 8). Euler n'a donné la démonstration de cette formule que plus tard (voir la note suivante). La série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{m_k}, \quad \text{où} \quad m_k = \frac{3k^2-k}{2}$$

appartient à la classe des fonctions $\theta(x)$ étudiées plus tard de façon très approfondie par C. Jacobi dans sa théorie des fonctions elliptiques.
[13] Euler a communiqué sa formule récurrente pour les sommes des diviseurs des nombres entiers à Goldbach le 1er avril 1747 (R. 827) et il l'a publiée dans sa «Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs», «Bibliothèque impartiale», 3, 1751 (E. 175; O. I, 2).

Fichier issu d'une page EMAN : http://eman-archives.org/dalembert/items/show/952?context=pdf

présentée à l'Académie de Berlin le 22 juin 1747 (Winter, Registres, p. 113). La démonstration de cette formule, appuyée sur le développement du produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ en série de puissances de x est exposée dans la lettre mentionnée à Goldbach du 1er avril 1747 et dans le mémoire «Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum», «N. Comm. Ac. Petrop.» 5 (1754–1755), 1760 (E. 244; O. I, 2); ce mémoire contient aussi la démonstration du développement du produit infini correspondant, exposée auparavant dans la lettre d'Euler à Goldbach du 9 juin 1750 (R. 858).

Fichier issu d'une page EMAN : http://eman-archives.org/dalembert/items/show/952?context=pdf