Lettre de Laplace à D'Alembert, 10 mars 1782

Expéditieur(s) : Laplace

Les pages

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

3 Fichier(s)

Relations entre les documents

Ce document n'a pas de relation indiquée avec un autre document du projet.

Citer cette page

Laplace, Lettre de Laplace à D'Alembert, 10 mars 1782, 1782-03-10

Irène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Consulté le 12/01/2026 sur la plate-forme EMAN : https://eman-archives.org/dalembert/items/show/997

Informations sur le contenu de la lettre

IncipitJe suis très flatté que mes recherches sur les suites aient…
RésuméSon mém. [MARS 1779]. Sa solution du problème des cordes vibrantes, au moyen du « calcul intégral aux différences finies partielles », conditions initiales, résumé de son raisonnement. Rép. à l'objection que D'Al. lui a faite la veille à l'Acad. [sc.]. L'exigence de continuité restreint la généralité de la solution : résolution par Lagrange (HAB, t. III), Euler pas assez exigeant, D'Al. trop. Justice qu'il lui rend.
Justification de la datationNon renseigné
Numéro inventaire82.14
Identifiant615
NumPappas1901

Présentation

Sous-titre1901
Date1782-03-10
Mentions légales

Editeur de la ficheIrène Passeron & Alexandre Guilbaud (IMJ-PRG) ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Informations éditoriales sur la lettre

Format du texte de la lettreNon renseigné
Publication de la lettreBulletin des Sciences mathématiques, 1879, p. 219-221. « Lettres inédites de Laplace », Bulletino di bibliographia e storia delle scienze, mathematiche e fisiche 19 (Rome 1886), p. 17-19
Lieu d'expéditionParis
DestinataireD'Alembert
Lieu de destinationParis
Contexte géographiqueParis

Information générales

LangueFrançais
Sourceautogr., d.s., « à Paris » adr., cachet noir, 2 p.
Localisation du documentParis Institut, Ms. 876, f. 12-13

Description & Analyse

Analyse/Description/RemarquesNon renseigné
Auteur(s) de l'analyseNon renseigné
Notice créée par Irène Passeron Notice créée le 06/05/2019 Dernière modification le 20/08/2024

---

6. Laplace à d'Alembert (*).

Ce dimanche, 10 mars 1782.

Monsieur et très illustre Confrère,

Je suis très flatté que mes Recherches sur les suites (**) ayent pu fixer quelques momens vostre attention; j'aurois bien désiré que vos occupations vous eussent permis de suivre l'analyse que j'y donne du problème des cordes vibrantes, au moyen du Calcul intégral aux différences finies partielles. Car il me paroist évident par cette analyse, que toutte figure initiale de la corde, dans laquelle deux cotés contigûs ne forment point entre eux un angle fini, peut estre admise. Voici en peu de mots à quoi se réduit mon raisonement (***).

Si l'on nomme $y_{x,t}$ l'ordonnée d'une corde vibrante dont l'abcisse est x, t désignant le tems, il est clair que la force accélératrice du point de la corde placé à l'extrémité de cette ordonnée sera proportionelle à la différence seconde des trois ordonnées qui répondent à $x-dx$, x, et $x+dx$, c'est-à-dire proportionelle à $y_{x-dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x+dx,t}$ de plus cette force sera par les principes de dynamique proportionelle à $ddy_{x,t}$, cette différence seconde, étant prise en ne faisant varier que le tems t, en le mettant donc, comme cela se peut, sous cette forme $y_{x,t-dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t+dt}$ on aura pour déterminer le mouvement de la corde, l'équation

$$y_{x,t+dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t-dt} = a^2 \{y_{x+dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x-dx,t}\}$$

a^2, étant un coëfficient constant. Cette équation convient incontestablement à

(*) folios 12 et 13. L'adresse est: A Monsieur Monsieur d'Alembert de l'Académie des Sciences et Secretaire perpétuel de l'Academie française au Louvre.

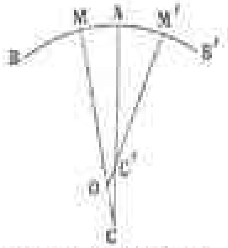
(**) Il s'agit du mémoire sur les suites publié dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour 1779*, p. 207—309; c'est le premier où Laplace ait considéré les *fonctions génératrices*.

(***) Laplace traite la question avec plus de developpements dans sa Théorie des probabilités (OEUVRES DE LAPLACE TOME SEPTIÈME, etc., page 77 et suiv.)

apartient également aux deux arcs AB et AB', vous me demandiés le quel des deux rayons CA ou C'A, on doit choisir pour représenter la force accélératrice du point A.

Pour répondre à cette difficulté, j'observerai que lorsqu'on suppose la force accélératrice inversement proportionelle au rayon osculateur au point A, cela veut dire que si l'on prend deux points M et M', infiniment voisins et équidistans de A, et que l'on fasse passer un cercle par ces trois points, la tous les points de la corde, excepté aux deux extrêmes, dont le premier n'a point d'ordonnée antérieure, et le second, d'ordonnée postérieure; mais ces deux points sont fixes par la condition du problème. J'observe cependant que pour que l'équation précédente subsiste, il est nécessaire que deux cotés contigûs ne forment point entre eux un angle fini; car au sommet de cet angle, la force accélératrice qui partout ailleurs est finie seroit infinie; la vitesse changeroit donc brusquement à ce point, et l'on ne pourroit plus y supposer la force accélératrice égale à $\left(\frac{ddy_{x,t}}{dt^2}\right)$, comme cela est nécessaire pour que l'équation générale du problême des cordes vibrantes puisse avoir lieu.

Maintenant, au lieu d'intégrer l'équation précédente par la considération des infiniment petits, ce qui peut laisser des doutes sur la discontinuité des fonctions arbitraires aux quelles on parvient, je l'intègre comme une équation aux différences finies, et dans la quelle par conséquent dx et dt sont des quantités finies. Il est visible que rien n'étant négligé dans cette intégration, les résultats que je trouve conviennent également au cas de dx et de dt, infiniment petit; et comme dans le cas général, la valeur de $y_{x,t}$ se construit en plaçant alternativement au dessus et au dessous de l'axe des abcisses, le polygone qui représente la valeur de $y_{x,t}$ lorsque $t=0$; on doit en conclure que cette mesme construction a lieu, lorsque dx et dt sont infiniment petits, et qu'ainsi la construction que vous avés donnée dans vostre mémoire sur les cordes vibrantes, relativement aux fonctions analytiques, est générale, quelque soit la figure initiale de la corde, pourvû qu'aucun de ses angles ne soit fini. Il ne me sera pas difficile présentement de répondre à la difficulté que vous me faisiés hier à l'académie, sur la force accélératrice qui a lieu au point de contact de deux positions de courbes qui se touchent.



Pour cela, je considère deux arcs de cercle BA et B'A qui se touchent au point A, et dont les centres sont C et C'. La force accélératrice au point A est en raison inverse du rayon osculateur à ce point; et comme il apartient également aux deux arcs AB et AB', vous me demandiés le quel des deux rayons CA ou C'A, on doit choisir pour représenter la force accélératrice du point A. Pour répondre à cette difficulté, j'observerai que lorsqu'on suppose la force accélératrice inversement proportionelle au rayon osculateur au point A, cela veut dire que si l'on prend deux points M et M', infiniment voisins et équidistans de A, et que l'on fasse passer un cercle par ces trois points, la force accélératrice au point A sera en raison inverse du rayon de ce cercle; cela posé, je dis que cette force ne sera inversement proportionelle ni à CA, ni à C'A, parce qu'aucun de ces deux rayons ne sera celui du cercle qui passe par les trois points M, A, M'; mais si l'on prolonge M'C' jusqu'à ce qu'il rencontre MC, en O, O sera le centre de ce cercle et la force en A, sera réciproque au rayon AO, or il est facile de prouver que AO est égal au produit des deux rayons CA et C'A, divisé par la moitié de leur somme. Il n'y a donc point d'ambiguité rélativement à la force accélératrice du point A, qui sera tousjours proportionelle à la différence seconde des trois ordonnées qui passent par les points M, A, et M'.

Telles sont, Monsieur, les réflexions que j'ai l'honneur de vous présenter sur une question très délicate, que vous avés tant de fois agitée, et sur laquelle l'opinion dépend de la manière dont on envisage le problême; il est naturel de transporter au résultat de la solution la continuité qu'exige la méthode dont on fait usage, et qui souvent restraint la généralité de cette solution; aussi je ne suis point surpris que nostre illustre ami, M. De la Grange, qui a traité ce problême dans le tome III des mémoires de Thurin par la méthode des suites infinies, ait cru la continuité nécessaire entre les différences quelconques des fonctions arbitraires; mais la méthode des différences finies dans laquelle on ne néglige rien est exemptée de ces inconvéniens. Il m'a toujours semblé que M. Euler a été trop loin, en n'assujetissant à aucune condition les fonctions arbitraires; mais je pense que vous avés été trop circonspect en les restreignant aux seules fonctions analytiques. Cette circonspection étoit bien naturelle dans l'inventeur d'un calcul qui offre des résultats aussi vastes et aussi inattendus; mais vous ne devés pas trouver mauvais que l'on vous prouve que vostre calcul a beaucoup plus d'étendüe que vous ne lui en aviés supçonné d'abord, je vous prie de croire que personne ne sent mieux que moi l'importance et la beauté de cette précieuse découverte, et ne vous rend à cet égard une justice plus sincère, à laquelle je suis porté d'ailleurs par le sentiment de la reconnoissance pour vos premières bontés, que je n'oublirai jamais.

J'ai l'honneur d'estre avec toutte l'estime et la considération possibles,

Monsieur et très illustre Confrère,

Vostre très humble et très obéissant Serviteur
Laplace.