

Exemple le plus simple d'un système S qui n'est pas modulaire

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

6 Fichier(s)

Contributeur·rices Haffner, Emmylou
Éditeurs Emmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS)
; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN
(Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

Titre Exemple le plus simple d'un système S qui n'est pas modulaire

Date 1894-1897

Sujet

- divisibilité
- notation générale
- système non modulaire

Cote Cod. Ms. Dedekind XI 1, p. 25-27.

Format 4 f. ; 8 p.

Langue Allemand

Description & Analyse

Description Etude assez générale semi-rédigée d'un système non-modulaire. Pas de mention des Dualgruppen. Références aux Vorlesungen 1894.

Mode(s) d'écriture

- Aufgaben
- Texte rédigé

Auteur·es de la description Haffner, Emmylou

Relations

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1

Ce document *utilise la même notation que* :



[\[Étude d'un groupe\] de type module](#)

Collection Cod. Ms. Dedekind XI 1

Ce document *est à lire avec* :



[Sur le dualisme dans la théorie des modules](#)□

[Afficher la visualisation des relations de la notice.](#)

Mots-clefs

[divisibilité](#), [notation-generale](#), [système non modulaire](#)

Notice créée par [Emmylou Haffner](#) Notice créée le 26/10/2018 Dernière modification le 17/09/2020

Einfachstes Beispiel einer nicht modul-artigen System $\mathcal{S}$.

m' hat Divisoren	m', m, a, d, d'	Multiple m'
m	m, d, d'	
a	a, d'	
d	d, d'	
d'	d'	
		m', m m', a m', m, d m', m, a, d, d'

$m' > m, a$	$\left. \begin{array}{l} d' < d, a \\ d < m \\ a < m' \\ m < m' \end{array} \right\}$	nächste Divisoren und Multiple
$m > d$		
$a > d'$		
$d > d'$		

$$m'\varphi_1 = m, a; m'\varphi_2 = d, d'; m'\varphi_3 = d' \quad | \quad d' \text{ gem. El. von } m'\varphi_2 \text{ und } m'\varphi_3$$

$$m\varphi_1 = d, \quad m\varphi_2 = d'$$

$$a\varphi_1 = d'$$

$$d\varphi_1 = d'$$

25

$\mathcal{A}\varphi_1$ System des nächsten Teiles des Elementes a zu a .
Allgemein: $\mathcal{A}\varphi_1$ und $\mathcal{A}\varphi_2$ haben kein gemeinsames Element, wo $\tau > 1$.
 Wäre nämlich u ein solches, so gäbe es in $\mathcal{A}\varphi_{\tau-1}$ ein Element b derart, dass u in $\mathcal{A}\varphi_1$ enthalten.

Wäre nämlich u ein solches, so gäbe es in $\mathcal{A}\varphi_{\tau-1}$ ein Element b derart, dass u in $\mathcal{A}\varphi_1$ enthalten.
 $a > u, b > u$
 und da b in $\mathcal{A}\varphi_1 = a, \mathcal{A}\varphi_1, \mathcal{A}\varphi_2, \dots$ enthalten, also $a > b$ ist, so sein
 $a > b > u$

nicht, da u nächstes Divisor von a ist, entweder $b = a$ oder $b = u$

(Vorher: a ist in keinem System $\mathcal{A}\varphi_\tau$ enthalten, wenn $\tau > 0$)

Deshalb kann b nicht $= a$ sein; ebensowenig $b = u$, weil alle Elemente von $\mathcal{A}\varphi_1$ verschieden von b sind.

$\mathcal{A}\varphi_2$ und $\mathcal{A}\varphi_3$ können gem. Elem. haben

$\mathcal{A}\varphi_2$ und $\mathcal{A}\varphi_3$? etwas u ? es sei u nächstes Teiler von dem in $\mathcal{A}\varphi_2$ enthalten
 b und dem in $\mathcal{A}\varphi_3$ enthaltenen c ; $b > u, c > u$
 $a > b > u$ und $a > c > u$

Sind b, c in $\mathcal{A}\varphi_1$ enthalten und verschieden, so ist $a = b \vee c$; denn setzt man $b \vee c = a_1$, so folgt $a > a_1$ (weil $a > b$ und $a > c$), also $a > a_1 > b$ und $a > a_1 > c$; wäre nun a_1 verschieden, so müsste a_1 (wegen b, c nächste Teiler von a) sowohl $= b$, als auch $= c$, mithin $b = c$ sein, was $\mathcal{A}\varphi_1$ -

merkung möge zugleich den Übergang bezeichnen. Der
folgenden Fundamentalsatz (vergl. D. F. 518):

Man nehme aus dem endlichen Modul $\mathfrak{a}$ ^{von $\mathfrak{a}$} n und nicht
mehr Zahlen so auszuwählen, daß sie ein auf
 $\mathbb{Z}$ irreduzibles System bilden, so ist es darf sein,
daß als Rest von n (und nicht weniger) unabhängige
Module.

Ist dies der Fall, so kann die in $\mathfrak{a}$ enthaltenen n Zahlen
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ein auf $\mathbb{Z}$ irreduzibles System bilden,
so ist jede beliebige Zahl α in $\mathfrak{a}$ von der Form

$$\alpha = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \dots + h_n \alpha_n,$$

wo die Koeffizienten h_i Zahlen des Körpers $\mathbb{Z}$ bedeuten.
Da nun $\mathfrak{a}$ ein endliches Modul, also von der Form

$$\mathfrak{a} = [\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m]$$

ist, so kann man, jede der m Basiszahlen α'_μ in der
oben angegebenen Form

$$\alpha'_\mu = h^{(\mu)}_1 \alpha_1 + h^{(\mu)}_2 \alpha_2 + \dots + h^{(\mu)}_n \alpha_n$$

darstellen, ^{bekanntlich} ~~man~~ ^{man} hat dann m verschiedene Zeilen
so wählen, daß alle m Produkte $h^{(\mu)}_i$ ganze Zahlen
des Körpers $\mathbb{Z}$ werden, also in $\mathbb{Z}$ aufgehen sind. Setzt
man nun $\omega_i = \alpha_i$, so bildet $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ein System
von n unabhängigen Modulen und folgt

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z} \omega_1 + \mathbb{Z} \omega_2 + \dots + \mathbb{Z} \omega_n,$$

so heißt es nun, daß die m Basiszahlen α'_μ in $\mathfrak{a}$ aufgehen
sind; mithin ist $\mathfrak{a}$ teiler der $\mathfrak{a}$, und da $\mathfrak{a}$ ein Rest
von n unabhängigen Modulen ist, so gilt (nach dem vorhergehenden
Satz) darf sein auf von $\mathfrak{a}$, in z. B. in.

Die Operation φ muß (wegen des Systems $\alpha\varphi'$, also auch die $\alpha\varphi'$ gegeben sein) so beschaffen sein, daß, wenn man ein beliebiges Element d hat, $m\varphi'$ der Subtrahend aller Elemente d ist, welche die Bedingung $m\varphi d = d$ genügen.

Denn wenn $\alpha\varphi d = d$, so ist $d\varphi'$ das Komplement von $\alpha\varphi'$, $d\varphi'$ daher, falls d ein Teil von $\alpha\varphi'$, also d ein Komplement von $\alpha\varphi'$; und umgekehrt, wenn d ein Komplement von $\alpha\varphi'$ bedeutet, so ist $d\varphi'$ ein Teil von $\alpha\varphi'$, also auch das Komplement des Systems $\alpha\varphi'$, $d\varphi'$, mit $\alpha\varphi d = d$ ~~zufolge~~ ^{zufolge} der Definition von φ .
 aus $\alpha\varphi d = d$, v. g. b. an.

befindet, daß d in dem System $m\varphi'$ aufzufallen ist, und wir wollen
gleich erklären, warum d ein solches Element ist,
das System $d\psi'$ als das Subsystem aller Elemente m erklären. Da
nun das ist, daß d Element, also $a\varphi'$ Teil von $m\varphi'$
ist, da $a\varphi'$ ist als ein vollkommen gleichbedeutend, ob
man sagt, d sei Element von $m\varphi'$, oder m sei Ele-
ment von $d\psi'$, und es folge β . immer d Element
von $d\psi'$, also d ein Element von $d\psi'$ ist, so ergeben
sich für d die beiden Aussagen des folgenden Satzes
Gefolge:

beide Aus-
sagen;

sind daher voll-
kommen gleich-
bedeutend. Wir
ausgeben sich
die folgenden
Sätze:

α' . Jedes Element a des Systems φ entspricht ein
vollständig bestimmtes System $a\varphi'$, welches ein Teil
von φ ist.

β' . Das Element a ist in $a\varphi'$ aufzufallen, also Ele-
ment des Systems $a\varphi'$. - Da a ist folge β . Element von $a\varphi'$.

γ' . Aus $a\varphi' = b\varphi'$ folgt $a = b$. - Da a folge β' .
ist a in $a\varphi'$, also in $b\varphi'$ aufzufallen, d. h. b ist in $a\varphi'$
aufzufallen, woraus nach β . folgt, daß $b\varphi'$ Teil von $a\varphi'$
ist; und da ebenso sich ergibt, daß $a\varphi'$ Teil von $b\varphi'$
ist, so folgt $a\varphi' = b\varphi'$ und daraus nach γ . auch $a = b$, v. g. l. γ .

δ' . Ist m Element von $a\varphi'$, so ist $m\varphi'$ Teil von $a\varphi'$.
- Da a folge β . da a Element von $m\varphi'$, woraus
nach β . folgt, daß $a\varphi'$ Teil von $m\varphi'$ ist; wenn daher n is,
quod ein Element von $m\varphi'$ bedeutet, so ist ebenso m
Element von $n\varphi'$, und $m\varphi'$ Teil von $n\varphi'$; und n
ist aus $a\varphi'$ Teil von $n\varphi'$, also n in $a\varphi'$ aufzufallen
Element a aus in $n\varphi'$ aufzufallen, d. h. n ist Element von
 $a\varphi'$ v. g. l. γ .

Leite

Sind a, b verschieden, und haben aq_1, bq_1 ein gemeinsames Element d , so ist $aq_1b = d$, (und d ist verschieden von a und b , nach 2.10.)

Beweis. Da $a > d$ und $b > d$, so ist auch $aq_1b > d$, also

$$a > aq_1b > d, \quad b > aq_1b > d,$$

wäre nun aq_1b verschieden von d , so müsste (nach Definition der nächsten Theile q_1) aq_1b sowohl $= a$, als $= b$, mithin $a = b$ sein, contra hyp. Also $aq_1b = d$, w. z. b. 10.

Folgerung. Sind a, b verschieden, so können aq_1, bq_1 nicht ein gew. Element haben. — Denn wenn d, d' gemeinsamen Elemente von aq_1, bq_1 sind, so ist aq_1b sowohl $= d$, als $= d'$, mithin $d = d'$, w. z. b. 10.

Leite. Sind a, b zwei verschiedene Elemente von $m\mathbb{Q}_1$, so ist $aq_1b = m$

Beweis. Denn aus $m > a, m > b$ folgt $m > aq_1b > a, m > aq_1b > b$; wäre nun aq_1b verschieden von m , so müsste (nach Def. von q_1) aq_1b sowohl $= a$, als $= b$, mithin $a = b$ sein (contra hyp.); also ist $aq_1b = m$, w. z. b. 10.

Daraus durch Folgerung, wie oben.