Zweigliedrige verwandte Moduln

Auteurs : Dedekind, Richard

En passant la souris sur une vignette, le titre de l'image apparaît.

4 Fichier(s)

ÉditeursEmmylou Haffner (Institut des textes et manuscrits modernes, CNRS-ENS) ; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen ; projet EMAN (Thalim, CNRS-ENS-Sorbonne nouvelle).

Présentation

TitreZweigliedrige verwandte Moduln
Date1888-189x
Sujet

- congruences
- meilleure présentation
- modules
- modules finis
- trois modules

CoteCod. Ms. Dedekind X 10, p. 20-21
Format1 f. ; 2p.
LangueAllemand

Description & Analyse

DescriptionPremière page, calculs sur modules finis générés par 2 éléments. Deuxième page : ancienne notation, application de la théorie générale des trois modules à des modules générés par 2 éléments.
Mode(s) d'écriture

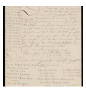
- Aufgaben
- Calculs

Auteur·es de la descriptionHaffner, Emmylou

Relations

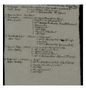
Collection Cod. Ms. Dedekind X 10

Ce document *a les mêmes calculs que :*

 Calculs sur des modules finis 14

Collection Cod. Ms. Dedekind X 11-1

Ce document *utilise la même notation que :*

 Meilleure présentation pour 3 modules a, b, c

Afficher la visualisation des relations de la notice.

Mots-clefs

congruences, meilleure-presentation, modules, modules finis, trois modules
Notice créée par Emmylou Haffner Notice créée le 17/01/2019 Dernière modification le 21/07/2021

Zweigliedrige verwandte Moduln

[illegible] ; [illegible] [illegible] rationalen Zahlen

$[p_1 + q_1\omega, p_2 + q_2\omega \cdots p_n + q_n\omega] = [a, b + c\omega]$. Um a, b, c aus den p, q zu finden, sei

$[q_1, q_2 \cdots q_n] = [c]$, also $q_1 = g_1 c$, $q_2 = g_2 c \cdots q_n = g_n c$; $c = g_1' q_1 + g_2' q_2 + \cdots + g_n' q_n$,

$$g_1 g_1' + g_2 g_2' + \cdots + g_n g_n' = 1, \text{ wo alle } g \text{ ganz}$$

$$b = g_1' p_1 + g_2' p_2 + \cdots + g_n' p_n$$

Man kann nun $b + c\omega$ zu den Zahlen $p_r + q_r\omega$ hinzufügen; da nun

$$p_r + q_r\omega = p_r + g_r c\omega = g_r(b + c\omega) + p_r - g_r b,$$

so ist unser Modul gleich

$[p_1 - g_1 b, p_2 - g_2 b \cdots p_n - g_n b, b + c\omega] = [a, b + c\omega]$,

wo

$$[a] = [p_1 - g_1 b, p_2 - g_2 b \cdots p_n - g_n b]$$

Um nun b, a [illegible] [illegible] aus den p, q zu finden, setze man

$p_r q_s - p_s q_r = a_{r,s}$, und $[a'] = [a_{1,2} \cdots a_{r,s} \cdots a_{n-1,n}]$

so wird

$p_r - g_r b = p_r \sum g_s g_s' - g_r \sum g_s' p_s$; $c(p_r - g_r b) = p_r \sum q_s g_s' - q_r \sum g_s' p_s = \sum a_{r,s} g_s' = 0 \pmod{[a']}$

und folglich

$[ac] = [c(p_1 - g_1 b) \cdots c(p_n - g_n b)]$ theilbar durch $[a']$, und $q_r b \equiv p_r c \mod. [a']$

Andererseits ist

$a_{r,s} = c(p_r g_s - p_s g_r) = c\{(p_r - g_r b)g_s - (p_s - g_s b)g_r\} \equiv 0 \mod [ac]$

folglich auch

$$[a'] \text{ theilbar durch } [ac]$$

mithin

$$[a'] = [ac]$$

d. h.

$[ac] = [p_1 q_2 - p_2 q_1 \cdots p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}]$; $[c]_1 = [q_1 \cdots q_n]$

wodurch a bestimmt ist; und b ist mod. a bestimmt durch

$$\frac{q_r}{c} b \equiv p_r \pmod{a}$$

[illegible], wo alle $a_{r,s} = p_r q_s - p_s q_r$ verschwinden, ist der Modul eingliedrig

$\frac{1}{c_1} \cdots \frac{1}{c_n} \quad \frac{b_1}{a_1 c_1} \cdots \frac{b_n}{a_n c_n}$

$0 \cdots 0 \quad \frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}$

$\sum\left[\frac{1}{c_r}, \frac{b_r}{a_r c_r} + \frac{\omega}{a_r}\right] = [a, b + c\omega]$

$[c] = \sum\left[\frac{1}{c_r}\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{C}}\right]$; $c = \frac{1}{\mathfrak{C}}$; $ac = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$

$[ac] = \sum\left[\frac{1}{a_r c_r}, \frac{b_r c_s - b_s c_r}{a_r a_s c_r c_s}\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right]$

$c \cdot b \equiv \frac{1}{c_r}$; $\frac{\mathfrak{A}}{a_r} b \equiv \frac{b_r}{a_r c_r} \pmod{\frac{1}{\mathfrak{C}}}$

$b = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$

$a = \frac{1}{\mathfrak{A}}$

$(a_r, m) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{a_r c_r}$

$(a_r, m) a_r =$

$\mathfrak{A}\mathfrak{C}\left[\frac{1}{c_r}, \frac{b_r}{a_r c_r} + \frac{\omega}{a_r}\right]$

Also [illegible]

$m = \sum (a_r, m) a_r$

$m = \mathfrak{M} a_r$

Zweite Aufgabe: Das kl. gem. Vielfache von n Moduln

$[a_1, b_1 + c_1\omega], [a_2, b_2 + c_2\omega] \cdots [a_n, b_n + c_n\omega]$

$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\omega]$ $\left[\frac{1}{\mathfrak{A}}\right] = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}\right]$

$\left[\frac{1}{\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{1}{c_r} \cdots \mathfrak{A}\frac{b_r c_s - b_s c_r}{a_r a_s c_r c_s}\right]$

zu finden. D. h. alle Systeme von ganzen Zahlen $x_1, y_1 \cdots x_n, y_n$ zu finden, für welche

$a_1 x_1 + (b_1 + c_1\omega) y_1 = a_2 x_2 + (b_2 + c_2\omega) y_2 = \cdots = a_n x_n + (b_n + c_n\omega) y_n = u + v\omega$

$v = c_1 y_1 = c_2 y_2 = \cdots = c_n y_n$

$u = a_1 x_1 + b_1 y_1 = a_2 x_2 + b_2 y_2 = \cdots = a_n x_n + b_n y_n$

$\left[\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{1}{a_r c_r} \cdots \frac{b_r c_s - b_s c_r}{a_r a_s c_r c_s} \cdots\right]$

$\frac{\mathfrak{A}}{a_r}\mathfrak{B} \equiv \frac{\mathfrak{A}}{a_r} \cdot \frac{b_r}{c_r}\mathfrak{C} \pmod{\mathfrak{A}}$

Ist $\mathfrak{C}' = g_1 c_1 = g_2 c_2 = \cdots = g_n c_n$ das kl. gem. Vielfache von $c_1, c_2 \cdots c_n$, d. h. $[g_1, g_2 \cdots g_n] = [1]$, also $\left[\frac{1}{\mathfrak{C}'}\right] = \left[\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2} \cdots \frac{1}{c_n}\right]$

so muss

$v = \mathfrak{C}' y$; $y_r = \frac{\mathfrak{C}'}{c_r} y = g_r y$, wo y ganz

$u = a_1 x_1 + b_1 g_1 y = a_2 x_2 + b_2 g_2 y = \cdots = a_n x_n + b_n g_n y$

Ist ebenso $\mathfrak{A}'$ das kl. gem. Vielfache von $a_1, a_2 \cdots a_n$, also $\left[\frac{1}{\mathfrak{A}'}\right] = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}\right]$, so muss ferner

$\frac{b_r g_r - b_s g_s}{a_r a_s} y$ und $\frac{u}{\mathfrak{A}'} \equiv 0 \pmod{\frac{1}{\mathfrak{A}'}}$

$\left[\mathfrak{A}' \frac{b_r g_r - b_s g_s}{a_r a_s} \cdots, 1\right] y$ theilbar durch $[1]$

Man setze $\left[\mathfrak{A}' \frac{b_r g_r - b_s g_s}{a_r a_s} \cdots, 1\right] = \left[\frac{1}{\mathfrak{A}''}\right]$, so ist $\mathfrak{A}''$ ganz

und $y = \mathfrak{A}'' z$, z ganz

$\frac{u}{a_1} \equiv \frac{b_1 g_1}{a_1} y$

$\cdots$

$\frac{u}{a_n} \equiv \frac{b_n g_n}{a_n} y$

$v = y$

mod. $[1]$

$\frac{u}{\mathfrak{A}} \equiv \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} z \pmod{1}$

$u = \mathfrak{A} w + \mathfrak{B} z$, $v = \mathfrak{C}' \mathfrak{A}'' z$

$\frac{\mathfrak{B}}{a_r} \equiv \frac{b_r g_r}{a_r} \mathfrak{A}'' \pmod{1}$; $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}'' \mathfrak{C}'$

T. STURM
i/RHEINGAU
RÜDESHEIM

Rüdesheim a/Rhein, 15. September 1888.

P. P.

Die Aussichten auf die diesjährige Lese haben im Laufe des Jahres aussergewöhnlich stark schwankt. Die Weinstöcke waren infolge des strengen Nachwinters anfangs sehr im Rückstande, tten aber eine grosse Fülle von Gescheinen angesetzt. Das schöne Wetter, welches sich im Monat Juni stellte, hat die späte Entwickelung alsbald ausgeglichen und theilweise einen sehr guten und schnellen rlauf der Blüthe bewirkt. Nur die weniger warmen Lagen, in denen die Reben bei Eintritt des genwetters anfangs Juli noch im Blühen waren, haben einen starken Ausfall erlitten. Das hierauf lgende, ungewöhnlich kühle und nasse Wetter, welches den ganzen Juli hindurch andauerte und auch im nat August vorherrschend blieb, hat dem Weinstock im Allgemeinen nicht so viel geschadet, als be- rchtet wurde. Namentlich in hiesiger Gemarkung und in anderen, ähnlich bevorzugten Lagen, in denen immer noch verhältnissmässig warm blieb, hat sich der Fruchtansatz sehr gut entwickelt, sodass hier n ziemlich reicher Ertrag zu erwarten steht. Leider sind indessen die Trauben hinsichtlich der Reife ch sehr zurück; doch kann dies bis zur Lesezeit (Ende Oktober) wieder einigermassen eingeholt werden, fern sich die Witterung bis dahin entsprechend warm und sonnig gestaltet.

Die Preise der angebogenen Liste habe ich unverändert gelassen, denn wenn auch im Allgemeinen e Bestände, infolge mehrfacher unzureichender Ernten in den letzten Jahren, recht knapp sind, so hatte h doch durch rechtzeitig gemachte, umfangreiche Einlagen — in Ergänzung des Ertrages meiner eigenen sgedehnten Besitzungen — hiergegen Vorsorge getroffen. Besonders reiche Vorräthe habe ich von den ten 1886r und 1884r Gewächsen, ferner von den Jahrgängen 1883, 1881, 1880 u. s. w., wie aus der eisliste näher ersichtlich.

Es lasten auf meinen Notirungen keine Verkaufsspesen, da ich weder reisen lasse, noch Agenten schäftige, sondern die dadurch erzielten Ersparnisse meinen Kunden in der Form billigerer Preise, bezw. ssere Qualitäten zugute kommen lasse.

Hochachtungsvoll

Joh. Bapt. Sturm.

HERBST 1888

Weisser Wein

	Per 100 Liter ohne Fass	Per Flasche mit Glas und Packung
	Mark	Mark
Rheinwein Nr. I angenehmer Tischwein	60	0.80
do. Nr. II kräftig und blumig	80	0.95
Eigenes Gewächs:		
Rüdesheimer Nr. III	100	1.15
do. Bischofsberg Nr. IV	140	1.50
do. do. I. Qual. Nr. V	180	1.85
do. Berg Nr. VI	240	2.40
do. Rosengarten	300	3.—
do. Rottland	300	3.—
do. Hinterhaus	375	3.50
do. Berg Riesling	420	4.—
do. Rosengarten Auslese	480	4.50
do. Rottland Auslese	540	5.—
do. Berg Orleans Auslese	—	5.—
do. Berg Auslese elegant, milde, feines Bouquet	—	6.—
do. Berg Auslese voll, edel und bouquetreich	—	6.—
do. Hinterhaus Auslese	—	7.50

Weisser Wein

Jahrgänge	
1884r	Oestricher
1884r oder 83r	Geisenheimer
	Rauenthaler
1878r	Winkeler Hasensprung
1884r	Scharlachberger
1884r	Johannisberger Eigenes Gewächs
1884r	Marcobrunner
1884r	Hochheimer Domdechanei
1885r	Geisenheimer Rothenberg
1878r	Schloss Vollradser
1876r	Rauenthaler Berg
1875r	Schloss Johannisberger
1883r	Rauenthaler Berg Auslese
1874r	Steinberger Cabinet feinste Auslese
1874r	Marcobrunner Auslese
1868r	Schloss Johannisberger Cabinet

Rother Wein

	Per 100 Liter ohne Fass	Per Flasche mit Glas und Packung
Ingelheimer selbst gekeltert	100	1.15
Assmannshäuser do. do.	140	1.50
do. Auslese Eigenes Gewächs	200	2.—
do. Hinterkirch do. do.	300	3.—
do. do. Auslese do. do. «Blume von Assmannshausen»	—	4.—

Moselwein

Jahrgänge	
1886r	Enkircher
1884r	Dhroner oder Graacher
1884r	Zeltinger oder Piesporter
1884r	Brauneberger
1884r oder 81r	Zeltinger Schlossberg
1884r	Grünhäuser
1884r	Josephshöfer

Deutscher Schaumwein

der Art des französischen Champagner

		Per Flasche mit Glas und Packung
Sekt Rheinwein	(nach Wunsch herb oder milde)	Mark 2.25
» Rüdesheimer	(halbmilde)	» 3.—
» Champagne	(milde)	» 4.—
» Cabinet	(herb)	» 4.50

b) Im Character der rheinischen Rieslingweine

Sekt Rüdesheimer Riesling

c) Roth

Sekt Ingelheimer

» Assmannshäuser

...erden zu nachstehenden Selbstkosten-Preisen berechnet. Ein Fass von 100 Liter ergibt ca. 125—130 gewöhnliche
In halben Flaschen 25 Pf. (bei Schaumwein 50 Pf.) mehr für 2 halbe Flaschen.

Preise der amtlich geaichten Weinfässer

Inhalt ca.	300 Liter (½ Stück)	200 Liter	150 Liter (½ Ohm)	100 Liter	75 Liter (½ Ohm)	50 Liter
Preis	M. 14.—	M. 11.—	M. 9.—	M. 6.50	M. 5.50	M. 4.—

Die Preise verstehen sich ab Rüdesheim, zahlbar nach Empfang ohne Sconto.

Druck von ... Frankfurt a. M.

Alte Bezeichnung.

~~Anwendung der allgemeinen~~ Theorie der drei Moduln auf verwandte zweigliedrige Moduln. (Für diese gilt allgemein der Satz

$\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_3 - \cdots - \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} = \sum (\mathfrak{m}_r, \mathfrak{m})\, \mathfrak{m}_r$

$(\mathfrak{a}''', \mathfrak{a}^0) = \mathfrak{a}$

$(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}^0) = \mathfrak{b}$

$\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}''' + \mathfrak{b}\mathfrak{m}'$

$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

$\mathfrak{m} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{m})\mathfrak{a} + (\mathfrak{b}, \mathfrak{m})\mathfrak{b} + (\mathfrak{c}, \mathfrak{m})\mathfrak{c} = hab_1c_1\mathfrak{a} + hbc_1a_1\mathfrak{b} + hca_1b_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\,;\ \mathfrak{b}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}\,;\ \mathfrak{c}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$

$\mathfrak{m}' = bc(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + ca(\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) + ab(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = aa'\mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c},\ \mathfrak{m}[a'] = [b, c]$ etc.

$\mathfrak{a}_1 = hbc_1\mathfrak{b} + hcb_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}_1 = hca_1\mathfrak{c} + hac_1\mathfrak{a}$

$\mathfrak{c}_1 = hab_1\mathfrak{a} + hba_1\mathfrak{b}$

$\mathfrak{d}_1 = haa_1'\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c},\ \mathfrak{m}[a_1'] = [b_1, c_1]$

$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}'' = aa'\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}'' = aa'\mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}_2 = ha\mathfrak{a} + hba_1b_1'\mathfrak{b} + hca_1c_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}_2 = hab_1a_1'\mathfrak{a} + hb\mathfrak{b} + hcb_1c_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}_2 = hac_1a_1'\mathfrak{a} + hbc_1b_1'\mathfrak{b} + hc\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}''' = haa_1'\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}''' = haa_1'\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}_3 = a\mathfrak{a} + hbb'a_1\mathfrak{b} + hcc'a_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{b}_3 = haa'b_1\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + hcc'b_1\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}_3 = haa'c_1\mathfrak{a} + hbb'c_1\mathfrak{b} + c\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}^0 = a\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c} < ha\mathfrak{a} + hbb'\mathfrak{b} + hcc'\mathfrak{c}$?

$\mathfrak{b}^0 = haa_1'\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + hcc_1'\mathfrak{c}$

$\mathfrak{c}^0 = haa_1'\mathfrak{a} + hbb_1'\mathfrak{b} + c\mathfrak{c}$

[illegible] Moduln

$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$

$\mathfrak{b} = [h\alpha_1, i\alpha_1 + k\alpha_2]$

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} =$

$[i, k] = [k']\,;\ i = mk',\ k = nk'$

$mm' + nn' = 1$

$m'i + n'k = k'\,;\ n' \equiv 0 \pmod{i}$; $n'k \equiv k' \pmod{i}$

$m'\alpha_2 + n'(i\alpha_1 + k\alpha_2) = n'i\alpha_1 + k'\alpha_2$

$\alpha_2 - m(n'i\alpha_1 + k'\alpha_2) = -mn'i\alpha_1$

$i\alpha_1 + k\alpha_2 - n(n'i\alpha_1 + k'\alpha_2) = mm'i\alpha_1$

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = [\alpha_1, h\alpha_1, \frac{i}{k'}\alpha_1, n'i\alpha_1 + k'\alpha_2] = [h'\alpha_1, i'\alpha_1 + k'\alpha_2]$

$[k'] = [i, k]\,;\ i' = im'\,;\ kn' \equiv k'$

$[h'] = [1, h, \frac{i}{k'}]\,;\ [kk'] = [i, hk, k, hk, i]$

$1, i, k, -i, -i, hk$

$1, 0$

$0, 1$

$k, 0$

i, k

$\frac{i}{k'} - \frac{kn'}{k'} \equiv 0 \pmod{\frac{i}{k'}}$

$\equiv \frac{ik'}{kk'} \pmod{\frac{i}{k}}$

21